

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι Βασισμένοι σε Γραμμικό Προγραμματισμό

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



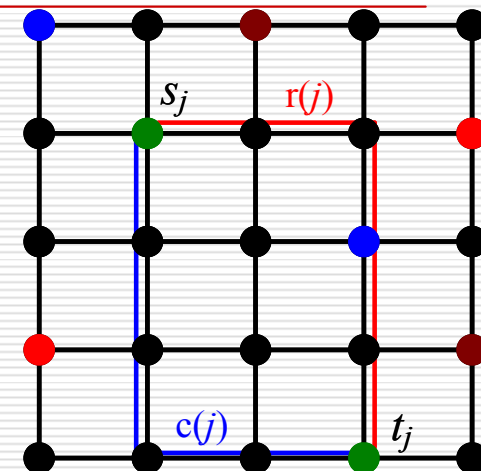
Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- Απόδοση χειρότερης περίπτωσης γνωστών ευρετικών αλγόριθμων (αρχικά κυρίως άπληστων).
- Σχεδιασμός poly-time αλγόριθμων που συμπεριφέρονται **αποδεδειγμένα καλά** για κάθε στιγμιότυπο.
- **Λόγος προσέγγισης**
 - Αλγόριθμου A για πρόβλημα Π: $\gamma_{\Pi}(A) = \max_{\sigma \in S_{\Pi}} \frac{f_{\sigma}(\lambda_A(\sigma))}{f_{\sigma}(\lambda^*(\sigma))}$
 - Προβλήματος Π: $\gamma_{\Pi} = \min_{A \text{ poly-time alg}} \{\gamma_{\Pi}(A)\}$

VLSI Routing

- Grid $n \times n$ και k ζεύγη κορυφών (s_j, t_j) που πρέπει να **συνδέσουμε** με μονοπάτια.
 - **Δύο** μόνο **δυνατότητες** για κάθε ζεύγος j :
 $r(j)$: πρώτα ευθεία μετά κάθετα.
 $c(j)$: πρώτα κάθετα μετά ευθεία.
- Συνδέσεις που **ελαχιστοποιούν φορτίο** (#μονοπατιών) κάθε **ακμής**.
 - **NP-complete**. Εκφράζεται ως **Ακέραιο Γραμμικό Πρόγραμμα**:

$$\begin{aligned} & \min W \\ \text{s.t. } & \sum_{e \in r(j)} x_j + \sum_{e \in c(j)} (1 - x_j) \leq W \quad \forall e \in E \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in [k] \end{aligned}$$



VLSI Routing

- Λύνουμε σε **πολυωνυμικό χρόνο** το αντίστοιχο (μη Ακέραιο) **Γραμμικό Πρόγραμμα**:
 - Βέλτιστη κλασματική λύση $W^* \leq$ βέλτιστη ακέραια λύση.

$$\begin{aligned} & \min W \\ \text{s.t. } & \sum_{e \in r(j)} x_j + \sum_{e \in c(j)} (1 - x_j) \leq W \quad \forall e \in E \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in [k] \end{aligned}$$

- Ντετερμινιστική στρογγυλοποίηση:
 - Για κάθε j , αν $x_j^* \geq 1/2$ στην βέλτιστη ΓΠ-λύση, (s_j, t_j) συνδέεται με $r(j)$, διαφορετικά με $c(j)$.
 - Λόγος προσέγγισης 2, επειδή $\max(x_j^*, 1 - x_j^*) \geq 1/2$.

VLSI Routing

□ Randomized rounding:

- Για κάθε j , (s_j, t_j) συνδέεται με $r(j)$ με πιθανότητα x_j^* , διαφορετικά συνδέεται με $c(j)$.
- Τυχαία μετ/τη W : μέγιστο φορτίο ακμής στην (ακέραια) λύση $(x_1, \dots, x_n)$ που προκύπτει. $E[W_e] \leq W^*$.
- Θέτουμε $m = 2n(n-1)$ (#ακμών στο grid).
- Εφαρμόζοντας Chernoff bounds με $\varepsilon = \sqrt{3 \ln(m/\delta)/W^*}$ έχουμε ότι αν $W^* \geq 3 \ln(m/\delta)$, τότε:

$$\Pr \left[W \leq W^* + \sqrt{3W^* \ln(m/\delta)} \right] \geq 1 - \delta$$

Γενική Προσέγγιση

- Χρησιμοποιούμε τη βέλτιστη λύση του LP ή/και ιδιότητες της για να κατασκευάσουμε (σε πολυωνυμικό χρόνο) εφικτή λύση για το IP και να αναλύσουμε το λόγο προσέγγισης.
 - «Στρογγυλοποίηση» βέλτιστης λύσης LP: (deterministic και) randomized rounding.
 - Δυϊκότητα και χρέωση κόστους σε dual variables: dual fitting.
 - Δυϊκότητα και complementary slackness: primal-dual.
- Ανάλυση (προβλήματα ελαχιστοποίησης):
 - Άνω φράγμα στο κόστος εφικτής λύσης.
 - Κάτω φράγμα στο κόστος βέλτιστης λύσης: βέλτιστη λύση LP ή εφικτή λύση για το δυϊκό.
 - Λόγος προσέγγισης $\geq$ integrality gap.
 - Μέθοδος δίνει (συχνά καλύτερο) άνω φράγμα στο λόγο προσέγγισης για κάθε συγκεκριμένο instance.

Κάλυμμα Συνόλου (Set Cover)

- Σύνολο στοιχείων $S = \{1, \dots, n\}$
- Μη-κενά υποσύνολα του S : $X_1, \dots, X_m$, $\bigcup_{i=1}^m X_i = S$
- Κόστος υποσυνόλων: $w_1, \dots, w_m$
- Ζητούμενο: κάλυμμα του S με ελάχιστο κόστος.
 - Ελάχιστου κόστους συλλογή υποσυνόλων $\mathcal{C}$: $\bigcup_{i \in \mathcal{C}} X_i = S$
 - f = μέγιστο πλήθος συνόλων όπου ανήκει κάποιο στοιχείο.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in [m] \end{array}$$

- **NP-δύσκολο** πρόβλημα.
- **Απληστία**: καλύτερος προσεγγιστικός αλγόριθμος.

Γενική Προσέγγιση

- Διατυπώνουμε το πρόβλημα ως Ακέραιο Γραμμικό Πρόγραμμα (IP).

- Set Cover IP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- «Χαλαρώνουμε» το IP σε Γραμμικό Πρόγραμμα (LP).

- Set Cover LP:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Integrality gap: $\max_{\sigma} \frac{\text{OPT}_{\text{IP}}(\sigma)}{\text{OPT}_{\text{LP}}(\sigma)}$

Set Cover: Στρογγυλοποίηση

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in [m] \end{array}$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
 - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j με $x_j \geq 1/f$
- Η λύση μας είναι **εφικτή**:
 - $\forall$ στοιχείο i , αντίστοιχος περιορισμός έχει $\# \text{μετ/τών} \leq f$
 - Αφού άθροισμα ≥ 1 , τουλάχιστον **μία μετ/τή** έχει τιμή $\geq 1/f$
- **Κάτω φράγμα**:
 - Κόστος βέλτιστης (ακέραιας) λύσης $\geq OPT$
- **Άνω φράγμα**:
 - **Στρογγυλοποίηση** αυξάνει τιμές μετ/των **κατά παράγοντα** $\leq f$
 - Κόστος εφικτής λύσης $\leq f OPT$
- Λόγος προσέγγισης $\leq f$
 - Λόγος προσέγγισης ≤ 2 για **vertex cover**.

Set Cover: Randomized Rounding

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in [m] \end{array}$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
 - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_j
 - Επαναλαμβάνουμε $c \ln(n)$ φορές, σταθερά $c \geq 2$
- Η λύση μας είναι εφικτή (με μεγάλη πιθανότητα):
 - $\forall$ στοιχείο i , πιθανότητα να μην καλυφθεί το $i \leq 1/n^c$
$$\begin{aligned} \Pr[i \text{ not covered}] &= \prod_{j:i \in X_j} (1 - x_j)^{c \ln n} \\ &\leq \prod_{j:i \in X_j} e^{-x_j c \ln n} = e^{-c \ln n \sum_{j:i \in X_j} x_j} \leq e^{-c \ln n} = 1/n^c \end{aligned}$$
 - Πιθανότητα να υπάρχει στοιχείο ακάλυπτο $\leq 1/n^{c-1}$
- Κάτω φράγμα:
 - Κόστος βέλτιστης (ακέραιης) λύσης $\geq OPT$

Set Cover: Randomized Rounding

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in [m] \end{array}$$

- Έστω x βέλτιστη λύση LP με κόστος OPT
 - Επιλέγουμε κάθε σύνολο j ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_j
 - Επαναλαμβάνουμε $c \ln(n)$ φορές, σταθερά $c \geq 2$
- Άνω φράγμα (στο αναμενόμενο κόστος μιας **εφικτής** λύσης):
 - $\Pr[X_j \text{ included}] = 1 - (1 - x_j)^{c \ln n} \leq x_j c \ln n$
 - Αναμενόμενο κόστος «λύσης» (μπορεί μη εφικτή) $\leq c \ln(n) OPT$
 - Αναμενόμενο κόστος **εφικτής** λύσης $\leq c \ln(n) OPT / \Pr[\text{λύση εφικτή}]$
- Λόγος προσέγγισης $\leq 2c \ln(n)$
 - Μετατροπή του αλγόριθμου σε ντετερμινιστικό (derandomization) με την μέθοδο του **conditional expectation**.

Βασική Ιδέα (ελαχιστοποίηση)

- Ξεκινάμε από **κάτω φράγμα** στο κόστος βέλτιστης λύσης.
 - Γενικά, κάτω φράγμα εκφράζεται σαν συνάρτηση **κάποιων παραμέτρων** του στιγμιότυπου εισόδου.
 - **LP-based** αλγόριθμοι: κάτω φράγμα προκύπτει από βέλτιστη λύση στο **LP relaxation** ή εφικτή λύση στο **δυϊκό**.
- (Πολυωνυμικός) αλγόριθμος: **εφικτή λύση** με κόστος $\leq$ μιας συνάρτησης των **παραμέτρων στο κάτω φράγμα**.
 - Για **LP-based** αλγόριθμους:
 - **Στρογγυλοποίηση** βέλτιστης (κλασματικής) λύσης LP relaxation σε ακέραια λύση.
 - «**Μετάφραση**» (μέσω **complementary slackness**) μιας εφικτής λύσης στο δυϊκό σε εφικτή ακέραια λύση για το πρωτεύον.
- Σύγκριση κάτω και άνω φράγματος δίνει (άνω φράγμα στο) **λόγο προσέγγισης**.

MAX-CUT

- Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με m ακμές, κάθε ακμή $\{u, v\}$ έχει βάρος $w_{uv} \geq 0$.
- Τομή: διαμέριση κορυφών $(S, V \setminus S)$ με $\emptyset \neq S \subset V$.
 - Σύνολο ακμών που αφαίρεσή τους δημιουργεί τουλ. 2 συνεκτικές συνιστώσες.
 - Βάρος τομής $W(S, V \setminus S) = \sum_{u \in S, v \notin S} w_{uv}$
- Πρόβλημα: υπολογισμός μιας τομής μέγιστου βάρους.
 - NP-complete, αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 0.878 [Goemans, Williamson, 94], randomized rounding σε SDP.
 - NP-complete η προσέγγισή του με λόγο $> 16/17$!

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{u,v \in V} (x_u + x_v - 2x_u x_v) w_{uv} \\ \text{s.t.} & x_u \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{u,v \in V} z_{uv} w_{uv} \\ \text{s.t.} & z_{uv} \leq 2 - x_u - x_v \quad \forall u, v \in V \\ & z_{uv} \leq x_u + x_v \quad \forall u, v \in V \\ & 0 \leq z_{uv} \leq 1 \quad \forall u, v \in V \end{array}$$

MAX-CUT

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{u,v \in V} z_{uv} w_{uv} \\ \text{s.t.} & z_{uv} \leq 2 - x_u - x_v \quad \forall u, v \in V \\ & z_{uv} \leq x_u + x_v \quad \forall u, v \in V \\ & 0 \leq x_u, z_{uv} \leq 1 \quad \forall u, v \in V\end{array}$$

- Άνω φράγμα στη βέλτιστη λύση: **συνολικό βάρος ακμών W** .
- (Απλός) αλγόριθμος: κάθε **κορυφή u** εντάσσεται **στο S** ανεξάρτητα με πιθανότητα **$1/2$** (διαφορετικά στο $V \setminus S$).
 - Χ βάρος ακμών στην τομή $(S, V \setminus S)$ (**τυχαία μεταβλητή**).
 - Ακμή $\{u, v\}$ «διασχίζει» τομή $(S, V \setminus S)$ με **πιθανότητα $1/2$** .
 - Αναμενόμενο βάρος ακμών στην τομή $(S, V \setminus S)$:
 $E[X] = W/2$ (**γραμμικότητα μέσης τιμής**).
 - Λόγος προσέγγισης **$1/2$** .
 - Μετατροπή σε **ντετερμινιστικό** με **conditional expectations**.
 - Ποιος είναι ο αντίστοιχος ντετερμινιστικός αλγόριθμος;
- Γενίκευση για **MAX-k-CUT**, λόγος προσέγγισης **$1 - 1/k$** .

MAX-SAT και MAX-k-SAT

- MAX-k-SAT:
 - Λογικές μεταβλητές $p_1, \dots, p_n$
 - Όροι $C_1, \dots, C_m$ με βάρη $w_1, \dots, w_m$
Κάθε όρος είναι μια διάζευξη k μετ/τών ή αρνήσεων τους.
 - Στόχος: αποτίμηση μεταβλητών που ικανοποιεί όρους με μέγιστο συνολικό βάρος.
- MAX-SAT (χωρίς περιορισμό στο #literals κάθε όρου):
 - Κάθε όρος είναι μια διάζευξη μιας ή περισσότερων μετ/τών ή αρνήσεων τους.
- MAX-SAT και MAX-k-SAT, $k \geq 2$, είναι NP-complete προβλήματα.
 - MAX-3-SAT έχει λόγο προσέγγισης $7/8$ (εκτός αν $P = NP$)!
 - MAX-k-SAT έχει λόγο προσέγγισης $\geq 1 - 2^{-k}$
 - MAX-SAT έχει λόγο προσέγγισης $\geq 3/4$

MAX-SAT και MAX-k-SAT: (Απλοϊκό) Randomized Rounding

- $\forall$ μεταβλητή p_i τίθεται στο 1 ανεξάρτητα, με πιθανότητα $1/2$
 - (Κάθε) λύση είναι εφικτή.
 - Άνω φράγμα για βέλτιστη λύση: συνολικό βάρος W των όρων.
 - Κάτω φράγμα στο βάρος της λύσης μας:
 - Έστω p , $0 < p < 1$, τ.ω. $\forall$ όρο C_j , $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq p$
 - Λόγω γραμμικότητας μέσης τιμής, συνολικό βάρος λύσης $\geq p W$
- MAX-k-SAT:
 - $\forall$ όρο C_j , $\Pr[C_j \text{ satisfied}] = 1 - 2^{-k}$
 - Λόγος προσέγγισης $\geq 1 - 2^{-k}$
- MAX-SAT:
 - $\forall$ όρο C_j , $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1/2$, αφού $|C_j| \geq 1$
 - Λόγος προσέγγισης $\geq 1/2$
- Derandomization με μέθοδο conditional expectations.

MAX-SAT: Randomized Rounding

- ❑ Χρειαζόμαστε **καλύτερο άνω φράγμα** στη βέλτιστη λύση!
- ❑ Διατύπωση ως IP και «χαλάρωση» σε LP.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^m z_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in P_j} x_i + \sum_{i \in N_j} (1 - x_i) \geq z_j \quad \forall C_j = \bigvee_{i \in P_j} p_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \neg p_i \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n] \\ & 0 \leq z_j \leq 1 \quad \forall j \in [m] \end{array}$$

- ❑ Έστω (x, z) βέλτιστη λύση LP με βάρος $\text{OPT} = \sum_{j=1}^m z_j w_j$
- ❑ $\forall$ μεταβλητή p_i τίθεται **στο 1** ανεξάρτητα, με πιθανότητα x_i
 - Άνω φράγμα για βέλτιστη λύση: **OPT**
 - Κάτω φράγμα στο βάρος της λύσης μας:
 - ❑ Έστω p , $0 < p < 1$, τ.ω. $\forall$ όρο C_j , $|C_j| = k_j$, $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq p z_j$
 - ❑ Λόγω γραμμικότητας μέσης τιμής, **συνολικό βάρος λύσης $\geq p \text{ OPT}$**

MAX-SAT: Randomized Rounding

$$\begin{array}{ll}
 \max & \sum_{j=1}^m z_j w_j \\
 \text{s.t.} & \sum_{i \in P_j} x_i + \sum_{i \in N_j} (1 - x_i) \geq z_j \quad \forall C_j = \bigvee_{i \in P_j} p_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \neg p_i \\
 & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in [n] \\
 & 0 \leq z_j \leq 1 \quad \forall j \in [m]
 \end{array}$$

- $\forall$ μεταβλητή p_i τίθεται **στο 1** ανεξάρτητα, **με πιθανότητα x_i**
- Έστω $p, 0 < p < 1$, τ.ω. $\forall$ όρο $C_j, |C_j| = k_j, \Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq p z_j$

$$\begin{aligned}
 \Pr[C_j \text{ not satisfied}] &= \prod_{i \in P_j} (1 - x_i) \prod_{i \in N_j} x_i \\
 &\leq \left[\frac{1}{k_j} \left(\sum_{i \in P_j} (1 - x_i) + \sum_{i \in N_j} x_i \right) \right]^{k_j} \\
 &\leq \left(1 - \frac{z_j}{k_j} \right)^{k_j} \leq e^{-z_j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\prod_{i=1}^k \alpha_i \right)^{\frac{1}{k}} &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i \\
 \sum_{i \in P_j} (1 - x_i) + \sum_{i \in N_j} x_i &\leq k_j - z_j
 \end{aligned}$$

MAX-SAT: Randomized Rounding

$$\begin{array}{ll}
 \max & \sum_{j=1}^m z_j w_j \\
 \text{s.t.} & \sum_{i \in P_j} x_i + \sum_{i \in N_j} (1 - x_i) \geq z_j \quad \forall C_j = \bigvee_{i \in P_j} p_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \neg p_i \\
 & 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in [n] \\
 & 0 \leq z_j \leq 1 \quad \forall j \in [m]
 \end{array}$$

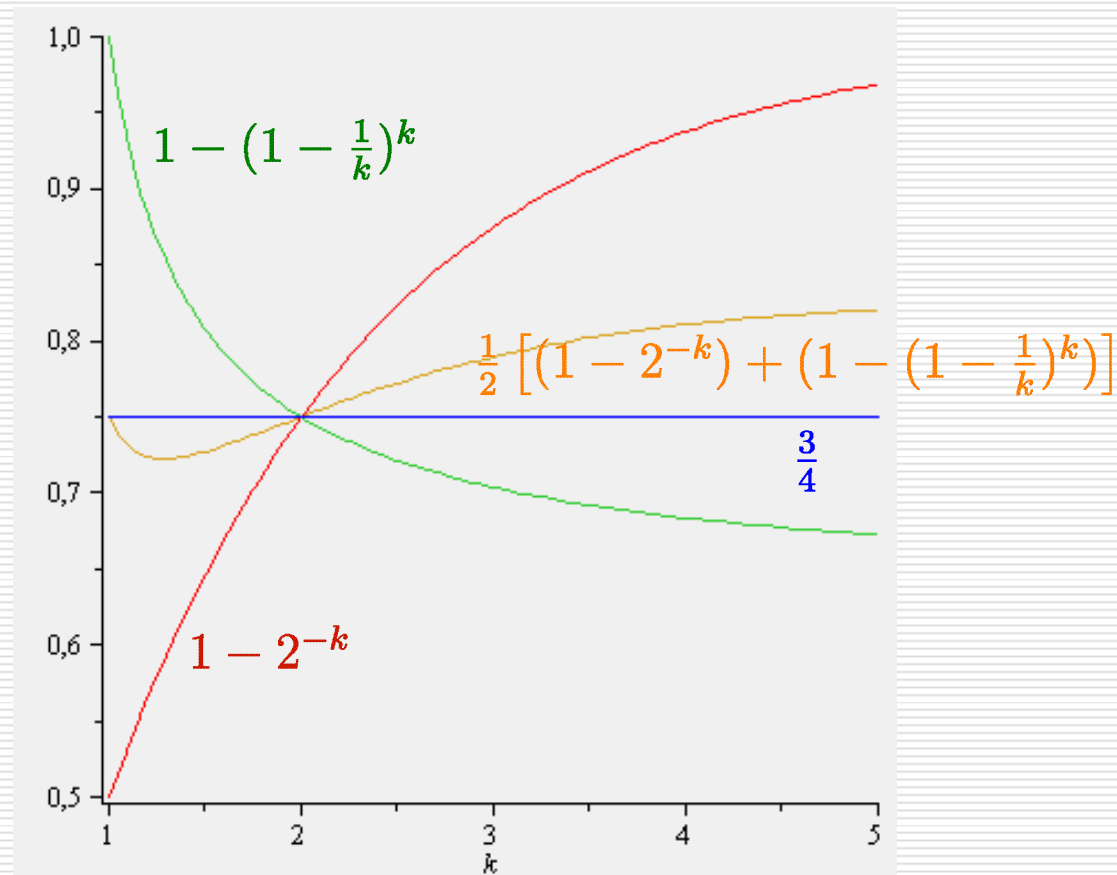
- $\forall$ μεταβλητή p_i τίθεται **στο 1** ανεξάρτητα, **με πιθανότητα** x_i
 - Έστω $p, 0 < p < 1$, τ.ω. $\forall$ όρο $C_j, |C_j| = k_j, \Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq p z_j$
 $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1 - e^{-z_j}$
 $\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) z_j \quad \forall z \in [0, 1], 1 - e^{-z} \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) z$
 - Πιο προσεκτική ανάλυση: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right] z_j$
- **Κάτω φράγμα** στο βάρος της λύσης μας: **$(1 - 1/e)$ OPT**
 - Λόγος προσέγγισης $\geq 1 - 1/e$

MAX-SAT: Συνδυασμένο Randomized Rounding

- «Απλοϊκό» rand. rounding: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq 1 - 2^{-k_j} \geq (1 - 2^{-k_j})z_j$
- LP-based rand. rounding: $\Pr[C_j \text{ satisfied}] \geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k_j}\right)^{k_j}\right] z_j$
 - Συμπληρωματική συμπεριφορά: «απλοϊκό» καλύτερο για μεγάλους όρους, LP-based καλύτερο για μικρούς όρους!
- Επιστρέφουμε την καλύτερη από τις λύσεις των δύο αλγόριθμων.
 - Έστω W_1 και W_2 αναμενόμενο βάρος από «απλοϊκό» και LP-based.
 - Αναμενόμενο βάρος λύσης: $E[\max(W_1, W_2)] \geq E[(W_1 + W_2)/2]$
 - Κάθε όρος C_j συνεισφέρει στο $E[(W_1 + W_2)/2]$ βάρος τουλάχιστον:
$$\frac{1}{2} \left[(1 - 2^{-k}) + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k\right) \right] z_j w_j \geq 3z_j w_j / 4, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$
 - Από γραμμικότητα μέσης τιμής, αναμενόμενο βάρος λύσης $\geq 3 \text{ OPT} / 4$
 - Λόγος προσέγγισης $\geq 3/4$

MAX-SAT: Συνδυασμένο Randomized Rounding

- Γραφική απόδειξη ότι $\frac{1}{2} \left[(1 - 2^{-k}) + (1 - (1 - \frac{1}{k})^k) \right] \geq 3/4, \forall k \in \mathbb{N}^*$



Set Cover: Dual Rounding

- Set Cover LP και το **δυϊκό** του.

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in [m]\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in X_j} y_i \leq w_j \quad \forall X_j \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i \in [n]\end{array}$$

- **Βέλτιστη λύση y στο δυϊκό** με «κέρδος» OPT.
 - $\forall$ **tight δυϊκό περιορισμό j** , επιλέγουμε το σύνολο X_j στο cover.
- **Εφικτή λύση:**
 - $\exists$ στοιχείο i **ακάλυπτο**: **κανένας** περιορισμός με y_i δεν είναι tight!
 - **Άτοπο**: αυξάνουμε (λίγο) το y_i , χωρίς παραβίασης περιορισμών, και βελτιώνουμε «κέρδος» δυϊκής λύσης.
- **Κάτω φράγμα** για βέλτιστη λύση: **OPT = άθροισμα των y_i**

Set Cover: Dual Rounding

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in X_j} y_i \leq w_j \quad \forall X_j \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i \in [n] \end{array}$$

- Βέλτιστη λύση y στο δυϊκό με «κέρδος» OPT .
 - $\forall$ tight δυϊκό περιορισμό j , επιλέγουμε το σύνολο X_j στο cover.

- Κάτω φράγμα για βέλτιστη λύση: $OPT = \text{άθροισμα των } y_i$

- Άνω φράγμα στο κόστος της λύσης μας:

$$\begin{aligned} w(\mathcal{C}) &= \sum_{X_j \in \mathcal{C}} w_j = \sum_{j: \text{constr. } j \text{ tight}} \sum_{i \in X_j} y_i \\ &= \sum_{i=1}^n y_i |\{j \in [m] : \text{constr. } j \text{ tight}\}| \\ &\leq f \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

- Λόγος προσέγγισης $\leq f$
- Άσκηση: νδο για κάθε στιγμιότυπο, κόστος dual rounding $\geq$ κόστος deterministic rounding.

Set Cover: Primal-Dual

- Set Cover LP και το **δυϊκό** του.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^m x_j w_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j:i \in X_j} x_j \geq 1 \quad \forall i \in S \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j \in [m] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in X_j} y_i \leq w_j \quad \forall X_j \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i \in [n] \end{array}$$

- Αντί βέλτιστης dual λύσης, μια (κατάλληλη) εφικτή λύση που «πληρώνει» για το primal κόστος (βλ. complementary slackness).
- Συνθήκες πρωτεύοντος $\forall j \in [m], x_j > 0 \Rightarrow w_j/\alpha \leq \sum_{i \in X_j} y_i \leq w_j$ (α-χαλαρωμένες):
 - Επιλογή μόνο **a-tight** συνόλων.
- Συνθήκες δυϊκού $\forall i \in [n], y_i > 0 \Rightarrow 1 \leq \sum_{j:i \in X_j} x_j \leq \beta$ (β-χαλαρωμένες):
 - Κάθε στοιχείο που «πληρώνει», καλύπτεται το πολύ β φορές.
 - Κάθε τέτοιο ζεύγος (x, y) δίνει λόγο προσέγγισης $\leq \alpha\beta$.

Set Cover: Primal-Dual

- Συνθήκες πρωτεύοντος: $\forall j \in [m], x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i \in X_j} y_i = w_j$
 - Επιλογή μόνο **tight** συνόλων.
- Συνθήκες δυϊκού
(f-χαλαρωμένες): $\forall i \in [n], (y_i > 0 \Rightarrow) 1 \leq \sum_{j: i \in X_j} x_j \leq f$
 - Κάθε στοιχείο **καλύπτεται** το πολύ **f** φορές.
 - Κάθε τέτοιο ζεύγος (x, y) δίνει **λόγο προσέγγισης** $\leq f$

PrimalDualSetCover($S, (X_1, w_1), \dots, (X_m, w_m)$)

$U \leftarrow S; \mathbf{y} \leftarrow \mathbf{0}; \mathcal{C} \leftarrow \emptyset; \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{0};$

while $U \neq \emptyset$ **do**

 take any $i \in U$ and increase y_i until

 for some $j, \sum_{\ell \in X_j} y_\ell = w_j$

$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{j\}; x_j \leftarrow 1; U \leftarrow U \setminus X_j;$

return($\mathcal{C}, \sum_{i \in \mathcal{C}} w_i$);

Set Cover: Primal-Dual

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i \in X_j} y_i \leq w_j \quad \forall X_j \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i \in [n] \end{array}$$

- Εφικτή λύση:
 - Συνθήκη τερματισμού: δεν υπάρχουν ακάλυπτα στοιχεία.
- Κάτω φράγμα για βέλτιστη λύση: άθροισμα των y_i
- Άνω φράγμα στο κόστος της λύσης μας:

$$\begin{aligned} w(\mathcal{C}) &= \sum_{j=1}^m x_j w_j = \sum_{j=1}^m x_j \sum_{i \in X_j} y_i \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j: i \in X_j} x_j \\ &\leq f \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned}$$

- Λόγος προσέγγισης $\leq f$

Set Cover: Primal-Dual

□ Λόγος προσέγγισης = f

