

Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων: Εισαγωγή και Βασικές Έννοιες

Δημήτρης Φωτάκης

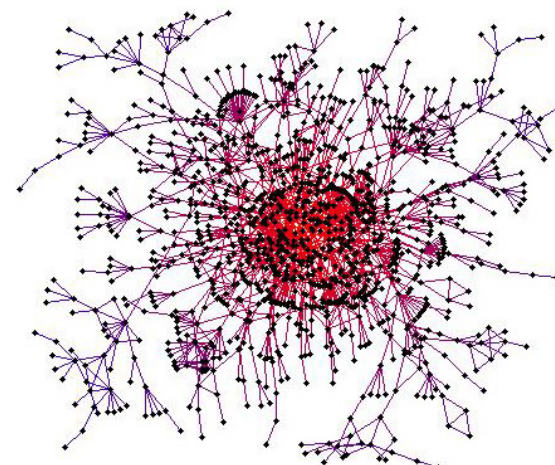
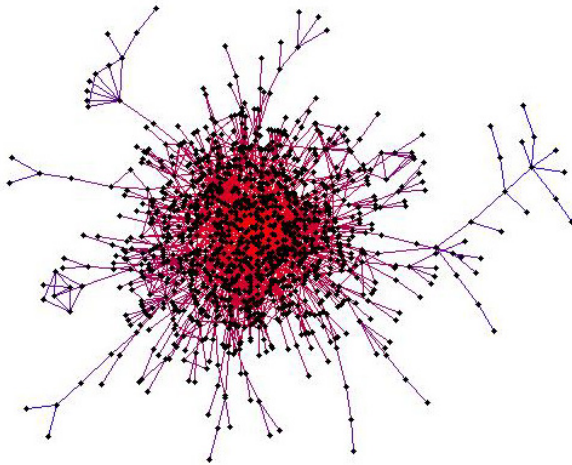
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Πολύπλοκα Συστήματα

- ... αποτελούνται από πολλές (ετερογενείς) συνιστώσες που **αλληλεπιδρούν**.
- Συμπεριφορά συστήματος δεν συνάγεται από χαρακτηριστικά συνιστωσών.
- Συμπεριφορά εξαρτάται **κυρίως** από **αλληλεπίδραση συνιστωσών** και είναι δύσκολο να προβλεφθεί.



Παραδείγματα

- **Φυσική** (phase transitions, symmetry breaking, self organization, ...).
- **Βιολογία** και Εξελικτική Βιολογία (εξέλιξη ειδών).
- **Οικονομικά**
 - Παγκόσμια Οικονομία: ανεξάρτητες οντότητες **αλληλεπιδρούν** με στόχο μεγιστοποίηση κέρδους.
- **Κοινωνιολογία**
 - Τι μικρός που είναι ο κόσμος!

Αναγκαιότητα για EECS

- Μεγάλα, πολύπλοκα, και δυναμικά μεταβαλλόμενα συστήματα αποτελούν τμήμα τεχνολογικής υποδομής.
- Δυσχερής η ιδέα μιας κεντρικής διαχειριστικής αρχής που εξασφαλίζει βέλτιστη λειτουργία.
 - Συνιστώσες ενεργούν αυτόνομα και ιδιοτελώς με κριτήριο τη βελτιστοποίηση ατομικών αντικειμενικών στόχων.
- Κλασσικά παραδείγματα:
 - Κυκλοφορία στις μεγάλες πόλεις.
 - Δρομολόγηση κυκλοφορίας στο Internet.

Μονόδρομος 'Υποπτου



- Συλλαμβάνεται ύποπτος για μεγάλη ληστεία.
Δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία!
 - Ομολογεί: 5 χρόνια φυλακή.
 - Δεν ομολογεί: 1 χρόνο φυλακή.
- Ο ύποπτος **δεν ομολογεί.**

Δίλημμα Υπόπτων



- Συλλαμβάνονται **δύο** συνεργάτες για μεγάλη ληστεία.
 - Κρατούνται σε **χωριστά** κελιά χωρίς επικοινωνία.

	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	5, 5	0, 15
Δεν ομολογεί A	15, 0	1, 1

- Αμφότεροι οι ύποπτοι **ομολογούν!**

Θεωρία Παιγνίων

- Προβλέπει συμπεριφορά **αυτόνομων** οντοτήτων που δρουν ιδιοτελώς με σκοπό βελτιστοποίηση **ατομικών στόχων**.
 - Εφαρμογή: όταν υπάρχουν **αντικρουόμενα συμφέροντα**.
 - **Υπόθεση**: ορθολογική και στρατηγική συμπεριφορά.
 - Πρόβλεψη: **σημεία ισορροπίας** (γεν. solution concepts).
- **Εργαλείο** για μελέτη «πολύπλοκων» συστημάτων.
 - Σημεία ισορροπίας και ιδιότητες τους.
 - Ορθολογική συμπεριφορά οδηγεί σε σημείο ισορροπίας.
- Περιοχή **εφαρμογής**:
 - Αποδοτικός (κατανεμημένος;) υπολογισμός σημείου ισορροπίας.
 - Αποδοτικότητα (σε σχέση με βέλτιστη διαμόρφωση).
- **Σχεδιασμός Μηχανισμών**:
 - Κανόνες ώστε να επιτύχουμε επιθυμητή συμπεριφορά / απόδοση.

Ανταγωνιστικό Παίγνιο

- Σύνολο παικτών που ανταγωνίζονται (π.χ. για πόρους).
- Κάθε παίκτης αποφασίζει **μόνο τη δική του** στρατηγική.
 - Μοναδικός στόχος: **μεγιστοποίηση ατομικού κέρδους**.
 - Ατομικό όφελος / κόστος εξαρτάται από στρατηγικές **όλων**.
- **Ισορροπία Nash:** Κανένας **δεν μπορεί να βελτιώσει** ατομικό κέρδος αλλάζοντας μόνο τη δική του στρατηγική.
 - Nash (1952) απέδειξε ότι **πάντα** υπάρχει τέτοια ισορροπία (αλλά μπορεί να είναι πεπλεγμένη – mixed).
 - Ισορροπία Nash αποτελεί **«λύση» του συστήματος:**
 - Αν οι παίκτες συμπεριφερθούν **στρατηγικά και ορθολογικά** και έχουν στη διάθεσή τους **πλήρη γνώση και επαρκή χρόνο**, τότε καταλήγουν σε μία ισορροπία Nash.

Ισορροπία Nash



	Ομολογεί B	Δεν ομολογεί B
Ομολογεί A	5, 5	0, 15
Δεν ομολογεί A	15, 0	1, 1

- Ισορροπία Nash **δεν βελτιστοποιεί** συνολικό αποτέλεσμα. Συμβιβασμός με δεδομένη την έλλειψη συντονισμού.

Μάχη των Φύλλων

	Σινεμά	ΟΚ, μπάσκετ
ΟΚ, σινεμά	1, 5	0, 0
Μπάσκετ	0, 0	5, 1

- Μοντέλο για συντονισμό με αντικρουόμενες προτιμήσεις.
- Ισορροπία Nash: καθένας επιλέγει **best response** στη στρατηγική του αντιπάλου.
 - Αμιγής (ντετερμινιστική επιλογή στρατηγικών): $(\Sigma, \Sigma), (M, M)$
 - Πεπλεγμένη (mixed): $((1/6, 5/6), (5/6, 1/6))$
 - Αποδεικνύεται ότι #ισορροπιών Nash είναι περιττός.
- Σινεμά στο Rocky: $((2, -1), (0, 0))$. Τι συμβαίνει;

Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

	Πέτρα	Ψαλίδι	Χαρτί
Πέτρα	0, 0	1, -1	-1, 1
Ψαλίδι	-1, 1	0, 0	1, -1
Χαρτί	1, -1	-1, 1	0, 0

- Μοναδική ισορροπία: $((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3))$.
- Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με 2 παίκτες.
 - von Neumann (1928): **υπάρχει πάντα** πεπλεγμένη ισορροπία.
 - Εύκολη απόδειξη μέσω LP duality.
- Nash (1952) **γενίκευσε** για παίγνια με μη-μηδενικό άθροισμα και πεπερασμένο πλήθος παικτών.

Ενδιαφέροντα Παραδείγματα

- Το Δίλημμα του (Απελπισμένου) Ταξιδιώτη
 - 2 παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 2 και 100 (αξία χαμένης βαλίτσας).
 - Αν δηλώσουν το ίδιο x , εισπράττουν x ευρώ ο καθένας.
 - Διαφορετικά, έστω $x < y$ οι δύο δηλώσεις. Αυτός που δήλωσε y , εισπράττει x , ο άλλος εισπράττει $x+2$.
- Μαντεύουμε τα 2/3 του μέσου όρου.
 - n παίκτες, καθένας δηλώνει έναν αριθμό μεταξύ 0 και 100.
 - Κερδίζει 1000 ευρώ (μόνον) αυτός με αριθμό πλησιέστερα στο $2(x_1 + \dots + x_n)/(3n)$.

Ισορροπία στην Πράξη

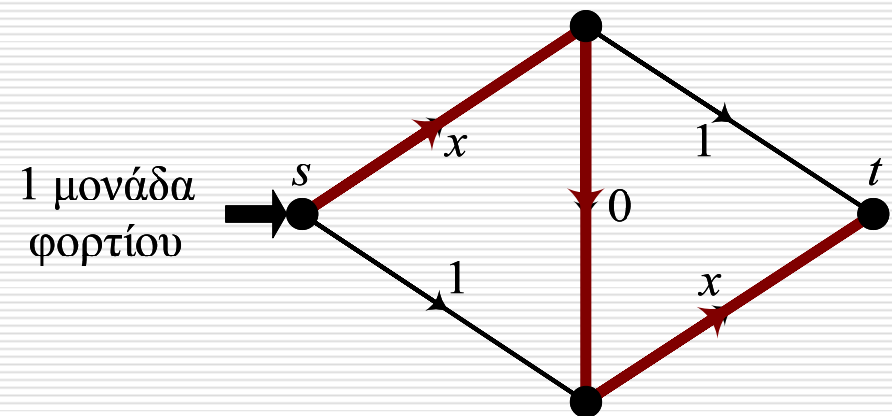
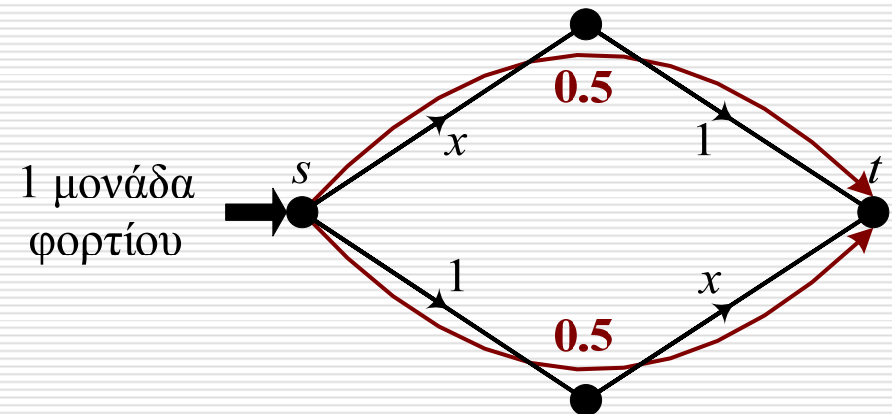
- Χρηματιστήριο:
 - Τιμές αγαθών και μετοχών (market equilibrium)
- Internet, δρόμοι:
 - Δρομολόγηση πακέτων, αυτοκινήτων.
- Κοινωνικά δίκτυα, WWW:
 - Δομή του δικτύου.
- Πως οι συμμετέχοντες υπολογίζουν ισορροπίες;
 - Απόδειξη Nash χρησιμοποιεί **Θ. Σταθερού Σημείου Brouwer**: μη αλγοριθμική.
 - Μπορεί να υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος;
 - Αν όχι, πως / γιατί / κατά πόσο συστήματα **λειτουργούν σε συνθήκες ισορροπίας;**

Υπολογισμός Ισορροπιών

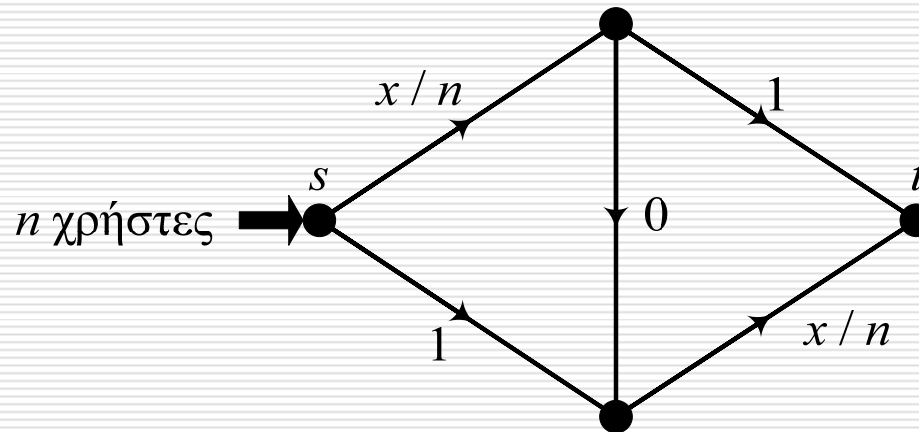
- Παίγνια με 2 παίκτες και **μηδενικό άθροισμα**:
 - **Αποδοτικός υπολογισμός** ισορροπίας Nash μέσω **LP duality**.
- Παίγνια με 2 παίκτες γενικής μορφής:
 - **Δεν** είναι γνωστός **αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου**, παρά το σημαντικό ενδιαφέρον και μεγάλη προσπάθεια.
 - **Lemke-Howson** (simplex-like) αλγ. **δεν** είναι αποδοτικός.
 - Ισορροπία Nash **δεν** είναι **NP-complete** (εξ' ορισμού)!
 - Είναι όμως **PPAD-complete**, δηλ. τόσο **δύσκολη** όσο ο υπολογισμός του **σταθερού σημείου** του Brouwer (ή οποιουδήποτε αντίστοιχου προβλήματος).

Τμήμα Αναρχίας – Παράδοξο Braess

- Συνολική καθυστέρηση **1.5**
 - Nash ισορροπία αποτελεί βέλτιστη λύση.
- Νέα **πολύ γρήγορη** σύνδεση.
- Συνολική καθυστέρηση **αυξάνεται σε 2** γιατί όλοι χρησιμοποιούν νέα σύνδεση.
- Τμήμα Αναρχίας: **4/3**
- Παραδοσιακός σχεδιασμός **δεν επαρκεί.**



Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων



- Μοντελοποίηση με (μη ατομική και ατομική) παίγνια συμφόρησης.
- Ανάλυση απόδοσης.
 - **Τίμημα Αναρχίας:** Υποβάθμιση λόγω αυτόνομης και ανταγωνιστικής συμπεριφοράς σε σχέση με βέλτιστη κεντροποιημένη διαχείριση.
- Κίνητρα για βελτίωση απόδοσης.
- Τεχνικές για βέλτιστο σχεδιασμό.

Δημοπρασίες και Μηχανισμοί

- Ένα αντικείμενο σε δημοπρασία με n παίκτες.
 - Το αντικείμενο αξίζει v_j για παίκτη j .
- Όλοι υποβάλλουν (σφραγισμένες) προσφορές b_1, \dots, b_n .
- Αντικείμενο κατοχυρώνεται σε παίκτη k με μέγιστη προσφορά b_k αντί τιμής t .
 - Ωφέλεια κερδισμένου = $v_k - t$.
 - Ωφέλεια μη κερδισμένου = 0 .
- Επιλογή τιμής ώστε να είναι πάντα **best response** $b_j = v_j$ (truthfulness);
 - Τιμή ίση με μέγιστη προσφορά.
 - Όχι, π.χ. 100, 5!
 - Τιμή ίση με δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ - ΑΤΖΕΝΤΑ

- Ισορροπία Nash σε **2-person 0-sum** παίγνια:
 - Εφαρμογή LP duality.
- Υπολογισμός **ισορροπίας Nash** σε **γενικά παίγνια**:
 - Brouwer's fixed point theorem και Sperner's lemma.
 - Αναφορά σε PPAD και Nash ισορροπία είναι PPAD-complete.
 - Ένας αλγόριθμος προσέγγισης για ισορροπία Nash.
- Σχεδιασμός Μηχανισμών:
 - Impossibility results, truthfulness, revelation principle
 - Single-parameter agents: Myerson's characterization, VCG, revenue maximization
 - Combinatorial auctions

Αντικείμενο - Ατζέντα

- Ανταγωνιστική ανάθεση πόρων και **παίγνια συμφόρησης:**
 - Μη ατομικά παίγνια και ατομικά παίγνια.
 - Ύπαρξη και πολυπλοκότητα (αμιγούς) ισορροπίας Nash.
 - Συνάρτηση δυναμικού και σύγκλιση σε ισορροπία Nash.
 - Τίμημα της αναρχίας και τεχνικές βελτίωσής του.