

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ

Πρόβλημα Μεταφοράς και Πρόβλημα Ανάθεσης

Άνοιξη 2021

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

$$\max \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i + z_1 = b_1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^n a_{mi} x_i + z_m = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m \geq 0$$

$$\min \sum_{i=1}^m b_i \lambda_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{i1} \lambda_i - \nu_1 = c_1$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^m a_{in} \lambda_i - \nu_n = c_n$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m, \nu_1, \dots, \nu_n \geq 0$$

Αν σε ενδιαμέσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v'_1$	$\dots$	$-v'_n$	$-\lambda'_1$	$\dots$	$-\lambda'_m$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m, \nu'_1, \dots, \nu'_n)$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Για παράδειγμα στο

$$\max \quad x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$2x_1 + x_3 + z_1 = 3$$

$$x_2 + x_3 + z_2 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 \geq 0$$

$$\min \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$2\lambda_1 - \nu_1 = 1$$

$$\lambda_2 - \nu_2 = -1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \nu_3 = 2$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \geq 0$$

είχαμε τελικό ταμπλώ

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
0	$-5/2$	0	$-1/2$	$-3/2$	$-9/2$
1	$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	1	1	0	1	2

και βέλτιστη λύση $(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2) = (1/2, 0, 2, 0, 0)$ με τιμή $9/2$

Από ταμπλώ: $(\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = (1/2, 3/2, 0, 5/2, 0)$ συμπληρωματική

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Για παράδειγμα στο

$$\max \quad x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$2x_1 + x_3 \leq 3$$

$$x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$

$$2\lambda_1 \geq 1$$

$$\lambda_2 \geq -1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

έχουμε τελικό ταμπλώ

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	ct
0	$-5/2$	0	$-1/2$	$-3/2$	$-9/2$
1	$-1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
0	1	1	0	1	2

και βέλτιστη λύση $(x_1, x_2, x_3) = (1/2, 0, 2)$ με τιμή $9/2$

Από ταμπλώ: $(\lambda_1, \lambda_2) = (1/2, 3/2)$ συμπληρωματική

Ταμπλώ *Simplex* και Δυϊκό

Αν σε ενδιαμέσο βήμα του *Simplex*

x_1	$\dots$	x_n	z_1	$\dots$	z_m	ct
$-v'_1$	$\dots$	$-v'_n$	$-\lambda'_1$	$\dots$	$-\lambda'_m$	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Τότε $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m, v'_1, \dots, v'_n)$ βασική λύση, συμπληρωματική της $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$

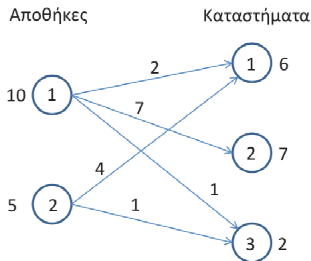
Απόδειξη:

- Μεγιστοποιώ την $z = \sum_{i=1}^n c_i x_i$
- Στο ενδιαμέσο βήμα η 1η γραμμή: $-\sum_{i=1}^n v'_i x_i - \sum_{j=1}^m \lambda'_j z_j - z = A$
- $z_j = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \rightarrow \sum_{j=1}^m \lambda'_j z_j = \sum_{j=1}^m \lambda'_j b_j - \sum_{j=1}^m \lambda'_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$
- $z = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{j=1}^m \lambda'_j b_j - \sum_{j=1}^m \lambda'_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i - \sum_{j=1}^m \lambda'_j z_j$
- Από 2, 4 και ισότητα πολωνύμων: $v'_i = \sum_{j=1}^m \lambda'_j a_{ij} - c_i$.
Άρα λ'_j 's, v'_i 's ικανοποιούν ισότητες δυϊκού
- Βασική γιατί το πολύ n μη μηδενικά στην γραμμή αντικειμενικής

Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Παράδειγμα-Κίνητρο:

- Έχουμε ίδια προϊόντα μοιρασμένα (άνισα) σε n αποθήκες
- Έχουμε m καταστήματα που ζητούν ποσότητες από τα προϊόντα
- Η μεταφορά προϊόντων από κάποια αποθήκη σε κάποιο κατάστημα έχει κάποιο κόστος ανά μονάδα μετακίνησης
- Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς



$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^m x_{ij} &\geq -s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &\geq d_j, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall i \in [n], j \in [m] \end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας $\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^m d_j$, δηλ. προσφορά=ζήτηση.

(Αλλιώς, π.χ., εικονικό κατάστημα με $c_{i,m+1} = 0, \forall i$ και $d_{m+1} = \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{j=1}^m d_j$)

Είναι γραμμικό πρόβλημα και θα χρησιμοποιήσουμε *Simplex*

- Βρες βασική εφικτή λύση (πάντα υπάρχει!)
- Δες αν κάποια γειτονική της έχει μικρότερο κόστος και πήγαινε αλλιώς σταμάτα.

Το πρόβλημα είναι κάπως 'μεγάλο και αραιό'

- Η υλοποίηση δεν θα γίνει με ταμπλώ
- Ανάκτηση των συντελεστών αντικειμενικής μέσω δυϊκού

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^m x_{ij} &\geq -s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &\geq d_j, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall i, j \end{aligned}$$

$$\max \sum_{j=1}^m \mu_j d_j - \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$$

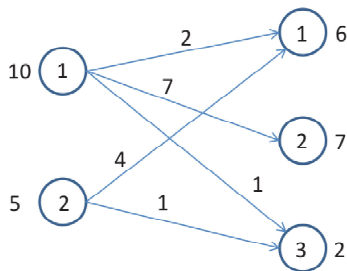
$$\begin{aligned} \mu_j - \lambda_i &\leq c_{ij}, & \forall i, j \\ \lambda_i, \mu_j &\geq 0, & \forall i, j \end{aligned}$$

Δέντρα Μεταφοράς

Παράδειγμα δέντρου μεταφοράς:

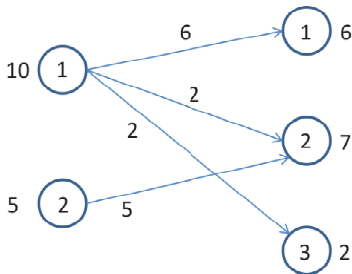
Αποθήκες

Καταστήματα



Αποθήκες

Καταστήματα



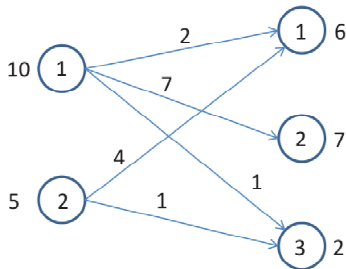
- Κάθε βασική λύση αντιστοιχεί σε δέντρο
- Κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε βασική λύση

(Δεχόμαστε μόνο δέντρα που σέβονται τους περιορισμούς)

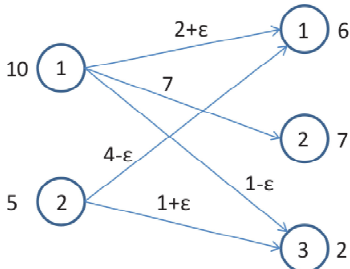
Από Γενική Λύση σε Δέντρο

Μπορούμε να 'σπάμε' τους κύκλους!

Αποθήκες Καταστήματα



Αποθήκες Καταστήματα



- Κατά μήκος του κύκλου προσθαφαιρούμε εναλλάξ ϵ
- Προσεκτικά, διατηρείται η εφικτότητα
- Επιλέγουμε ϵ που μηδενίζει κάποια ακμή
- 'Σπάζοντας' όλους τους κύκλους καταλήγουμε σε δέντρο.

Κάθε βασική λύση αντιστοιχεί σε δέντρο

- Έχουμε $n + m$ περιορισμούς

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^m x_{ij} - z_i &= -s_i, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} - \zeta_j &= d_j, \quad \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Αθροίζοντας, $\sum_{i=1}^n z_i + \sum_{j=1}^m \zeta_j = 0$, άρα z_i 's και ζ_j 's μηδενικά:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_{ij} &= s_i, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= d_j, \quad \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Προσφορά=ζήτηση $\rightarrow$ γραμμική εξάρτηση: βαθμός (γενικά) $n + m - 1$
- Οι βασικές μεταβλητές είναι $n + m - 1$ σε πλήθος και το αντίστοιχο γράφημα είναι συνεκτικό και σέβεται περιορισμούς: Δέντρο!

Κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε βασική λύση

- Στο δέντρο $n + m - 1$ (το πολύ) μη μηδενικές μεταβλητές

Περνάμε από δέντρο σε δέντρο με τη βοήθεια συντελεστών του δυϊκού.

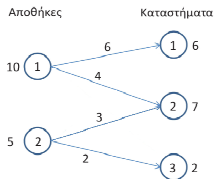
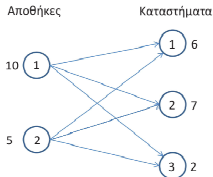
Αρνητικός συντελεστής για ακμή



ακμή εισέρχεται με $+\epsilon$ ώστε να καταστραφεί ο κύκλος που δημιούργησε

Αρχική κορυφή-δέντρο: κανόνας βορειοδυτικής γωνίας

- Με πρώτη αποθήκη, όσο μπορείς γέμιζε με σειρά τα καταστήματα.
- Συνέχισε ομοiotρόπως με την επόμενη στη σειρά αποθήκη.



	1	2	3	
1	6	4		10
2		3	2	5
	6	7	2	

Νέο Δέντρο-Βάση (Μη Εκφυλισμός)

Υπενθύμιση: οι περιορισμοί του δυϊκού είναι

$$\mu_j - \lambda_i \leq c_{ij}, \forall i, j \rightarrow \mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}, \forall i, j$$

Επιλογή ακμής που εισέρχεται αν γράφημα συνεκτικό:

- Μέσω συμπληρωματικών συνθηκών:
 - Όπου έχω θετική τιμή στον πίνακα η αντίστοιχη ανισότητα *tight*. (ισοδύναμα $v_{ij} = 0$)
 - Δίνω αυθαίρετη τιμή για κάποια μεταβλητή και παίρνω τιμές για τα μ_j 's και λ_i 's
 - Παίρνω λύση και υπολογίζω τα υπόλοιπα v_{ij} 's
- Αν v_{ij} 's όλα θετικά, τότε εφικτή δυϊκή και άρα βέλτιστο δέντρο, αλλιώς επέλεξε ζεύγος k, l με $v_{kl} < 0$
- Βάλε την ακμή (k, l) στο δέντρο.

‘Τιμή’ ακμής που εισέρχεται:

- Θα κλείνει κύκλο. Δώσε της τιμή $+ε$ ώστε, σεβόμενος τους περιορισμούς ($\pm ε$ κατά μήκος κύκλου)
 - να μηδενιστεί κάποια ακμή και
 - οι υπόλοιπες ακμές να παραμείνουν μη αρνητικές.
- Εύρεση κύκλου, γενικά, με Αναζήτηση Κατά Πλάτος (ΑΚΠ)
 - Ξεκίνα από μια κορυφή της ακμής
 - Επισκέψου όλους τους γείτονες της
 - Συνέχισε με τους γείτονες των γειτόνων μέχρι να βρεθεί κορυφή από δύο ‘γείτονες-πρόγονους’

Νέο Δέντρο-Βάση (Εκφυλισμός)

Επιλογή ακμής που εισέρχεται αν γράφημα μη συνεκτικό:

- Μέσω συμπληρωματικών συνθηκών:
 - Όπου έχω θετική τιμή στον πίνακα η αντίστοιχη ανισότητα *tight*. (ισοδύναμα $v_{ij} = 0$)
 - Προσθέτω στη βάση ακμές που διατηρούν γράφημα ακυκλικό και το κάνουν συνεκτικό
 - Για αυτές τις ακμές ορίζω $v_{ij} = 0$ κι έτσι παίρνω σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας (γιατί με νοιάζουν τα υπόλοιπα v_{ij} 's όταν για τη βάση τα v_{ij} 's είναι 0)
 - Συνεχίζω όπως στη μη εκφυλισμένη περίπτωση.

‘Τιμή’ ακμής που εισέρχεται: όπως μη εκφυλισμένη περίπτωση αλλά:

- Αν με τη νέα ακμή και τα $\pm \epsilon$ πρέπει να μειώσω μηδενική ακμή της βάσης,
 - αφαιρώ αυτήν από τη βάση και
 - προσθέτω τη νέα με τιμή 0 χωρίς μεταβολές στις υπόλοιπες τιμές

Παράδειγμα

Οι περιορισμοί του δυϊκού $\mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}$

Πίνακας κόστους (σταθερός):

	1	2	3
1	3	2	1
2	2	1	3

$(p_1, p_2) = (10, 5)$, $(q_1, q_2, q_3) = (6, 7, 2)$

Αρχική βάση:

	1	2	3	
1	6	4		10
2		3	2	5
	6	7	2	

- Συμπλ. συνθήκες: $\mu_1 - \lambda_1 = 3$, $\mu_2 - \lambda_1 = 2$, $\mu_2 - \lambda_2 = 1$, $\mu_3 - \lambda_2 = 3$
- Θέτουμε (αυθαίρετα) $\lambda_1 = 0$ κι έχουμε $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 1, 3, 2, 4)$
- Με αυτά, $v_{13} = 1 - 4 + 0 = -3 < 0$ και άρα ακμή $(1, 3)$ εισέρχεται

	1	2	3	
1	6	$4 - \epsilon$	$+\epsilon$	10
2		$3 + \epsilon$	$2 - \epsilon$	5
	6	7	2	

	1	2	3	
1	6	2	2	10
2		5		5
	6	7	2	

Παράδειγμα

Οι περιορισμοί του δυϊκού $\mu_j - \lambda_i + v_{ij} = c_{ij}$

Πίνακας κόστους (σταθερός):

	1	2	3
1	3	2	1
2	2	1	3

$(p_1, p_2) = (10, 5), (q_1, q_2, q_3) = (6, 7, 2)$

1η αλλαγμένη βάση:

	1	2	3	
1	6	2	2	10
2		5		5
	6	7	2	

- Συμπλ. συνθήκες:
 $\mu_1 - \lambda_1 = 3, \mu_2 - \lambda_1 = 2, \mu_3 - \lambda_1 = 1, \mu_2 - \lambda_2 = 1$
- Θέτουμε (αυθαίρετα) $\lambda_1 = 0$ κι έχουμε
 $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0, 1, 3, 2, 1)$
- Με αυτά, $v_{21} = 2 - 3 + 1 = 0$ και $v_{23} = 3 - 1 + 1 = 3 > 0$ άρα
εφικτή δυϊκή και βέλτιστη (συμπληρωματική χαλαροτητα)

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης

- Υπάρχουν n άτομα και n εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν
- Καθε άτομο πρέπει να αναλάβει ακριβώς μια εργασία που μπορεί να είναι οποιαδήποτε.
- Το κόστος (ή κέρδος) κάθε εργασίας διαφέρει από άτομο σε άτομο
- Στόχος η ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) του συνολικού κόστους (ή κέρδους)

$$\min \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\in \{0,1\}, & \forall i,j\end{aligned}$$

$$\min \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall i,j\end{aligned}$$

Η ‘γενίκευση’ είναι πρόβλημα μεταφοράς με ακέραιες βέλτιστες λύσεις.
(ακέραιες: Μπορούμε να σπάμε κύκλους χωρίς να αυξάνεται το κόστος)

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Διαισθητικά:

- Κάθε εργασία έχει κάποιο δικό της ελάχιστο κόστος
- Από άτομο σε άτομο αλλάζει το πόσο παραπάνω από αυτό το κόστος χρεωνόμαστε
- Προσθαφαιρώντας, απλά αλλάζουμε το ελάχιστο κόστος
- Αντίστοιχη λογική δουλεύει και για τα άτομα

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Τυπικά:

- Για i, j : $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ ποσά που προστέθηκαν σε γραμμή i και στήλη j .
- Για οποιοδήποτε σημείο στο χώρο (οποιαδήποτε x_{ij} 's):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (c_{ij} + u_i + v_j) x_{ij} &= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_i (u_i \sum_j x_{ij}) + \sum_j (v_j \sum_i x_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_i u_i + \sum_j v_j \end{aligned}$$

- $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$ και $\sum_{i,j} (c_{ij} + u_i + v_j) x_{ij}$ ελαχιστοποιούνται στα ίδια x_{ij} 's

Αν όχι τετραγωνικός, προσθέτουμε γραμμές ή στήλες με 0 παντού

Αν μεγιστοποιούμε κέρδος αντί ελαχιστοποιούμε κόστος

- Αντίστοιχη (με την πιο κάτω) ιδέα δουλεύει ή απλά ανάγουμε σε ελαχιστοποίηση:

$$\max \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} = \min - \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

- Το $-\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ ελαχιστοποιείται στα ίδια σημεία με το

$$nM - \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} = M \sum_{i,j} x_{ij} - \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i,j} (M - c_{ij})x_{ij},$$

όπου $M = \max_{i,j} \{c_{ij}\}$

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Το δυϊκό αντιστοιχεί σε ανάθεση τιμών στις κορυφές του γράφου

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) \\ \lambda_i + \mu_j &\leq c_{ij}, \quad \forall i, j \in [n] \end{aligned}$$

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

Μέγιστο Ταίριασμα: Μέγιστο σύνολο ακμών χωρίς κοινά άκρα

Σφιχτή ακμή: Ακμή για την οποία $\lambda_i + \mu_j = c_{ij}$

Ελάχιστο κάλυμμα: Ελάχιστο σύνολο κορυφών που 'ακουμπά' όλες τις ακμές

Μέγιστο ταίριασμα M μεγέθους n ($|M| = n$) από σφιχτές ακμές δίνει

$$\sum_i (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{(i,j) \in M} (\lambda_i + \mu_j) = \sum_{(i,j) \in M} c_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}^*$$

όπου $x_{ij}^* = 1$ αν $(i,j) \in M$ και $x_{ij}^* = 0$ αλλιώς

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i: \lambda_i = \min_{k,l} \{c_{kl}\}, \mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας από αταίριαστες στο A , χρησιμοποιώντας
 - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
 - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min \{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j \mid i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
 - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
 - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'
- και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Ο Ουγγρικός Αλγόριθμος

Υλοποίηση της προηγούμενης ιδέας επάνω στον πίνακα κόστους
(αν και προηγήθηκε αυτής)

Υπενθύμιση: Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό

- 1 Από κάθε γραμμή/στήλη αφαίρεσε το ελάχιστο στοιχείο της
- 2 Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους = n τέλος.
- 3 Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα 0 με ελάχιστο πλήθος ευθειών
- 4 Από τα μη καλυμμένα στοιχεία αφαίρεσε το μικρότερο από αυτά, πρόσθεσέ το στις τομές ευθειών και πήγαινε στο βήμα 2

Αντιστοιχία:

- Τα ακάλυπτα στοιχεία αντιστοιχούν σε ακμές μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Τα κρυμμένα μόνο από οριζόντια ευθεία: από $A \setminus A'$ σε $\Delta \setminus \Delta'$
- Τα κρυμμένα μόνο από κάθετη ευθεία: από A' σε Δ' (σφιχτές)
- Τα καλυμμένα από δυο ευθείες σε ακμές από $A \setminus A'$ σε Δ'
- Οι τιμές στον πίνακα κρατούν 'απόσταση' από 'σφιχτότητα'

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	16
γ	6	38	19	11
δ	16	12	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές Αφαίρεση σε στήλες

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	4
γ	0	32	13	8
δ	4	0	7	33

	a	b	c	d
α	13	8	0	2
β	12	0	24	0
γ	0	32	13	4
δ	4	0	7	29

Μέγιστο ταίριασμα:
 $\{(\alpha, c), (\beta, d), (\gamma, a), (\delta, b)\}$
με κόστος:
 $17+16+6+12=51$

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	16
γ	6	38	19	11
δ	16	12	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές Αφαίρεση σε στήλες

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	4
γ	0	32	13	5
δ	4	0	7	33

	a	b	c	d
α	13	8	0	2
β	12	0	24	0
γ	0	32	13	1
δ	4	0	7	29

Μέγιστο ταίριασμα:
 $\{(\alpha, c), (\beta, d), (\gamma, a), (\delta, b)\}$
με κόστος:

$$17 + 16 + 6 + 12 = 51$$

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	a	b	c	d
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αφαίρεση σε γραμμές Αφαίρεση σε στήλες Αρκούν 3 γραμμές

	a	b	c	d
α	13	8	0	6
β	12	0	24	3
γ	2	34	0	7
δ	1	12	0	26

	a	b	c	d
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

	a	b	c	d
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αρκούν 3 γραμμές

Προσθαφαίρεση *min*

Αρκούν 3 γραμμές

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α	12	8	0	3
β	11	0	24	0
γ	1	34	0	4
δ	0	12	0	23

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

Παράδειγμα 2

Βέλτιστη ανάθεση για πίνακα κόστους

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α	30	25	17	23
β	24	12	36	15
γ	6	38	4	11
δ	20	31	19	45

Αρκούν 3 γραμμές

Προσθαφαίρεση *min*

Μέγιστο ταίριασμα

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α	11	7	0	2
β	11	0	25	0
γ	0	33	0	3
δ	0	12	1	23

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α	11	5	0	0
β	13	0	27	0
γ	0	31	0	1
δ	0	10	1	21

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
α	11	5	0	0
β	13	0	27	0
γ	0	31	0	1
δ	0	10	1	21

Μέγ. Ταίρ.: $\{(\alpha, d), (\beta, b), (\gamma, c), (\delta, a)\}$. Κόστος: $23 + 12 + 4 + 20 = 59$

Εύρεση Μέγιστου Ταιριάσματος

Στο βήμα 2 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

- ② Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους = n τέλος.

Εύρεση μέγιστου ταιριάσματος (με augmenting paths):

- Φτιάξε το γράφημα που ορίζουν οι ακμές κόστους 0
- Ξεκίνα από τυχαίο (υποβέλτιστο) ταίριασμα
- Ξεκινώντας από ακάλυπτες αριστερές κορυφές κάνε ΑΚΠ χρησιμοποιώντας
 - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
 - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Αν βρεις μεγιστικό μονοπάτι στην ΑΚΠ που καταλήγει σε ακάλυπτη δεξιά κορυφή
 - βγάλε τις ζυγές ακμές του μονοπατιού από το ταίριασμα και
 - βάλε τις μονές ακμές του μονοπατιού στο ταίριασμα
- Πήγαινε στο βήμα 2 μέχρι να μην βρίσκεις τέτοιο μονοπάτι

Στο βήμα 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

- 3 Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Δεδομένου μέγιστου ταιριάσματος από 0 οι ελάχιστες ευθείες εύκολα:

- Σημείωσε κάθε γραμμή που δεν έχει 0 στο ταίριασμα
- Σημείωσε κάθε στήλη που έχει 0 σε (νεο)σημειωμένη γραμμή
- Σημείωσε κάθε γραμμή που έχει 0 στο ταίριασμα σε (νεο)σημειωμένη στήλη
- Επανάλαβε από το βήμα 2 μέχρι να μην υπάρχει 'πρόοδος'
- Αν όχι άλλη 'πρόοδος' τράβα ευθείες σε ασημειώτες γραμμές και σημειωμένες στήλες

Στην ουσία κάναμε την ΑΚΠ που δίνει A' και Δ'

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

- 2 Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους = n τέλος.
- 3 Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('μεταφρασμένο')

Το μέγιστο ταίριασμα από 0 ισούται με
το ελάχιστο 'κάλυμμα' των 0 από ευθείες

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}$$

$$\min \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^m \mu_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} &\leq 1, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j) \in E} x_{ij} &\leq 1, \quad \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall (i,j) \in E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i + \mu_j &\geq 1, \quad \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j &\geq 0 \end{aligned}$$

A Totally Unimodular.

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

- 3 Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους = n τέλος.
- 4 Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('αμετάφραστο')

Σε ένα διμερή γράφο το μέγιστο ταίριασμα
ισούται με το ελάχιστο κάλυμμα

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}$$

$$\min \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^m \mu_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} &\leq 1, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j) \in E} x_{ij} &\leq 1, \quad \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall (i,j) \in E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i + \mu_j &\geq 1, \quad \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j &\geq 0 \end{aligned}$$

A Totally Unimodular.

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

- 3 Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους = n τέλος.
- 4 Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('αμετάφραστο')

Σε ένα διμερή γράφο το μέγιστο ταίριασμα
ισούται με το ελάχιστο κάλυμμα

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \\ \min \quad & \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^m \mu_j \\ \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} & \leq 1, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j) \in E} x_{ij} & \leq 1, \quad \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in E \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda_i + \mu_j & \geq 1, \quad \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j & \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \end{aligned}$$