

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ

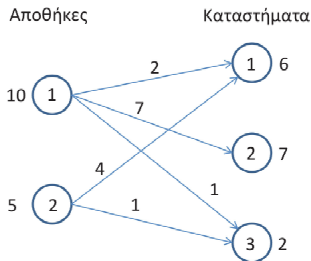
Πρόβλημα Μεταφοράς και Πρόβλημα Ανάθεσης

Άνοιξη 2021

Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Παράδειγμα-Κίνητρο:

- Έχουμε ίδια προϊόντα μοιρασμένα (άνισα) σε n αποθήκες
- Έχουμε m καταστήματα που ζητούν ποσότητες από τα προϊόντα
- Η μεταφορά προϊόντων από κάποια αποθήκη σε κάποιο κατάστημα έχει κάποιο κόστος ανά μονάδα μετακίνησης
- Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς



$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^m x_{ij} &\geq -s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &\geq d_j, & \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall i \in [n], j \in [m] \end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας $\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^m d_j$, δηλ. προσφορά=ζήτηση.

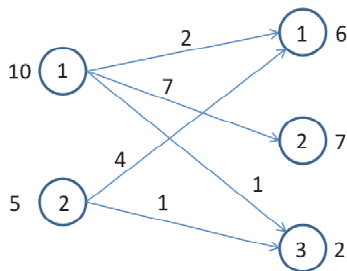
(Αλλιώς, π.χ., εικονικό κατάστημα με $c_{i,m+1} = 0, \forall i$ και $d_{m+1} = \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{j=1}^m d_j$)

Δέντρα Μεταφοράς

Παράδειγμα δέντρου μεταφοράς:

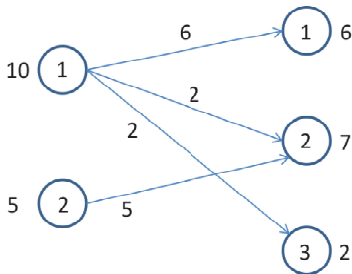
Αποθήκες

Καταστήματα



Αποθήκες

Καταστήματα

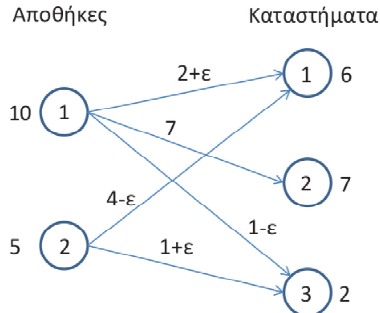
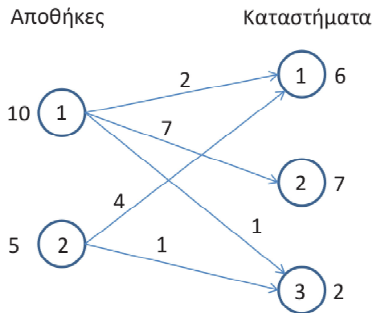


- Κάθε βασική λύση αντιστοιχεί σε δέντρο
- Κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε βασική λύση

(Δεχόμαστε μόνο δέντρα που σέβονται τους περιορισμούς)

Από Γενική Λύση σε Δέντρο

Μπορούμε να 'σπάμε' τους κύκλους!



- Κατά μήκος του κύκλου προσθαφαιρούμε εναλλάξ ϵ
- Προσεκτικά, διατηρείται η εφικτότητα
- Επιλέγουμε ϵ που μηδενίζει κάποια ακμή
- 'Σπάζοντας' όλους τους κύκλους καταλήγουμε σε δέντρο.

Κάθε βασική λύση αντιστοιχεί σε δέντρο

- Έχουμε $n + m$ περιορισμούς

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^m x_{ij} - z_i &= -s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} - \zeta_j &= d_j, & \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Αθροίζοντας, $\sum_{i=1}^n z_i + \sum_{j=1}^m \zeta_j = 0$, άρα z_i 's και ζ_j 's μηδενικά:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_{ij} &= s_i, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= d_j, & \forall j \in [m] \end{aligned}$$

- Προσφορά=ζήτηση $\rightarrow$ γραμμική εξάρτηση: βαθμός (γενικά) $n + m - 1$
- Οι βασικές μεταβλητές είναι $n + m - 1$ σε πλήθος και το αντίστοιχο γράφημα είναι συνεκτικό και σέβεται περιορισμούς: Δέντρο!

Κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε βασική λύση

- Στο δέντρο $n + m - 1$ (το πολύ) μη μηδενικές μεταβλητές

Το Πρόβλημα της Ανάθεσης

- Υπάρχουν n άτομα και n εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν
- Κάθε άτομο πρέπει να αναλάβει ακριβώς μια εργασία που μπορεί να είναι οποιαδήποτε.
- Το κόστος (ή κέρδος) κάθε εργασίας διαφέρει από άτομο σε άτομο
- Στόχος η ελαχιστοποίηση (ή μεγιστοποίηση) του συνολικού κόστους (ή κέρδους)

$$\min \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\in \{0,1\}, & \forall i,j\end{aligned}$$

$$\min \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, & \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, & \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall i,j\end{aligned}$$

Η ‘γενίκευση’ είναι πρόβλημα μεταφοράς με ακέραιες βέλτιστες λύσεις.
(ακέραιες: Μπορούμε να σπάμε κύκλους χωρίς να αυξάνεται το κόστος)

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Διαισθητικά:

- Κάθε εργασία έχει κάποιο δικό της ελάχιστο κόστος
- Από άτομο σε άτομο αλλάζει το πόσο παραπάνω από αυτό το κόστος χρεωνόμαστε
- Προσθαφαιρώντας, απλά αλλάζουμε το ελάχιστο κόστος
- Αντίστοιχη λογική δουλεύει και για τα άτομα

Η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει αν σε ολόκληρη γραμμή ή στήλη προσθαφαιρέσουμε οποιοδήποτε αριθμό. Π.χ.:

	a	b	c
α	30	25	17
β	24	12	36
γ	6	38	19

	a	b	c
α	13	8	0
β	12	0	24
γ	6	38	19

	a	b	c
α	7	8	0
β	6	0	24
γ	0	38	19

Τυπικά:

- Για i, j : $u_i, v_j \in \mathbb{R}$ ποσά που προστέθηκαν σε γραμμή i και στήλη j .
- Για οποιοδήποτε σημείο στο χώρο (οποιαδήποτε x_{ij} 's):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (c_{ij} + u_i + v_j) x_{ij} &= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_i (u_i \sum_j x_{ij}) + \sum_j (v_j \sum_i x_{ij}) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_i u_i + \sum_j v_j \end{aligned}$$

- $\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$ και $\sum_{i,j} (c_{ij} + u_i + v_j) x_{ij}$ ελαχιστοποιούνται στα ίδια x_{ij} 's

Αν όχι τετραγωνικός, προσθέτουμε γραμμές ή στήλες με 0 παντού

Αν μεγιστοποιούμε κέρδος αντί ελαχιστοποιούμε κόστος

- Αντίστοιχη (με την πιο κάτω) ιδέα δουλεύει ή απλά ανάγουμε σε ελαχιστοποίηση:

$$\max \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} = \min - \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

- Το $-\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$ ελαχιστοποιείται στα ίδια σημεία με το

$$nM - \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} = M \sum_{i,j} x_{ij} - \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i,j} (M - c_{ij})x_{ij},$$

όπου $M = \max_{i,j} \{c_{ij}\}$

Ζεύγος Πρωτεύοντος-Δυϊκού

Το δυϊκό αντιστοιχεί σε ανάθεση τιμών στις κορυφές του γράφου

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in [n] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) \\ \lambda_i + \mu_j &\leq c_{ij}, \quad \forall i, j \in [n] \end{aligned}$$

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

Μέγιστο Ταίριασμα: Μέγιστο σύνολο ακμών χωρίς κοινά άκρα

Σφιχτή ακμή: Ακμή για την οποία $\lambda_i + \mu_j = c_{ij}$

Ελάχιστο κάλυμμα: Ελάχιστο σύνολο κορυφών που 'ακουμπά' όλες τις ακμές

Μέγιστο ταίριασμα M μεγέθους n ($|M| = n$) από σφιχτές ακμές δίνει

$$\sum_i (\lambda_i + \mu_i) = \sum_{(i,j) \in M} (\lambda_i + \mu_j) = \sum_{(i,j) \in M} c_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}^*$$

όπου $x_{ij}^* = 1$ αν $(i,j) \in M$ και $x_{ij}^* = 0$ αλλιώς

Θα βρούμε λύση Δυϊκού που προδίδει λύση Πρωτεύοντος με ίσο κόστος

- Έστω A και Δ οι αριστερές και δεξιές κορυφές αντίστοιχα
- Αρχική ανάθεση για το δυϊκό: $\forall i: \lambda_i = \min_{k,l} \{c_{kl}\}, \mu_i = 0$
- Βρες μέγιστο ταίριασμα M από σφιχτές ακμές. Αν $M = n$ τέλος
- Αν $M < n$, στις σφιχτές ακμές κάνε ΑΚΠ ξεκινώντας από αταίριαστες στο A , χρησιμοποιώντας
 - στα μονά βήματα ακμές εκτός ταιριάσματος
 - στα ζυγά ακμές του ταιριάσματος
- Έστω A' και Δ' οι αριστερές και δεξιές κορυφές που βρήκε η ΑΚΠ
- Ταίριασμα + ΑΚΠ $\rightarrow$ καμία σφιχτή ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$
- Θέσε $\delta = \min \{c_{ij} - \lambda_i - \mu_j \mid i \in A', j \in \Delta \setminus \Delta'\}$ και
 - $\lambda_i := \lambda_i + \delta$ για τις κορυφές στο A'
 - $\mu_j := \mu_j - \delta$ για τις κορυφές στο Δ'
- και επανάλαβε πηγαίνοντας στο 3 (*)
- Σε κάθε επανάληψη μια ακμή μεταξύ A' και $\Delta \setminus \Delta'$ γίνεται σφιχτή
- Τελικά ταίριασμα μεγέθους n από σφιχτές ακμές

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

- 3 Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους = n τέλος.
- 4 Αν μεγέθους $< n$ κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('αμετάφραστο')

Σε ένα διμερή γράφο το μέγιστο ταίριασμα
ισούται με το ελάχιστο κάλυμμα

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\max \sum_{(i,j) \in E} x_{ij}$$

$$\min \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^m \mu_j$$

$$\begin{aligned} \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} &\leq 1, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j) \in E} x_{ij} &\leq 1, \quad \forall j \in [m] \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall (i,j) \in E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i + \mu_j &\geq 1, \quad \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j &\geq 0 \end{aligned}$$

A Totally Unimodular.

Μέγιστο Ταίριασμα - Ελάχιστο Κάλυμμα

Στο βήμα 2 και 3 του Ουγγρικού Αλγορίθμου είχαμε

- 3 Βρες μέγιστο ταίριασμα από 0. Αν μεγέθους = n τέλος.
- 4 Αν μεγέθους < n κάλυψε όλα τα μηδενικά χρησιμοποιώντας τις λιγότερες ευθείες

Θεώρημα König ('αμετάφραστο')

Σε ένα διμερή γράφο το μέγιστο ταίριασμα
ισούται με το ελάχιστο κάλυμμα

Γραφοθεωρητική απόδειξη αλλά είναι και συνέπεια ισχυρής δυϊκότητας

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \\ \min \quad & \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{j=1}^m \mu_j \\ \sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} & \leq 1, \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i:(i,j) \in E} x_{ij} & \leq 1, \quad \forall j \in [m] \\ x_{ij} & \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in E \end{aligned} \quad \begin{aligned} \lambda_i + \mu_j & \geq 1, \quad \forall (i,j) \in E \\ \lambda_i, \mu_j & \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \end{aligned}$$