



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2020-2021

(ΕΜΠ – ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης - Α. Παγουρτζής - Θ. Λιανέας

3η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 7/7/2021

Άσκηση 1

Θεωρήστε πως έχουμε ένα γενικευμένο πρόβλημα ανάθεσης m εργασιών σε n άτομα, όπου το i -στό άτομο μπορεί να αναλάβει μέχρι k_i εργασίες. Επιπλέον, κάποια άτομα απαγορεύεται να πάρουν κάποιες εργασίες (υπάρχει όμως εφικτή ανάθεση) και δίνεται το σύνολο των απαγορευμένων αναθέσεων. Αναγάγετε το γενικευμένο αυτό πρόβλημα στο κλασικό που είδαμε στο μάθημα (αν πιστεύετε ότι γίνεται).

Άσκηση 2

Έστω A ο $n \times m$ πίνακας πρόσπτωσης ενός κατευθυνόμενου γράφου G , δηλ.: $A(u, e) = 1$ αν $e = (u, x)$ για κάποια κορυφή x , $A(u, e) = -1$ αν $e = (x, u)$ για κάποια κορυφή x και $A(u, e) = 0$ διαφορετικά. Δείξτε ότι ο A είναι Totally Unimodular. Χρησιμοποιήστε αυτό για να δείξετε πως σε ένα δίκτυο με ακέραιες χωρητικότητες, η μέγιστη ροή και η ελάχιστη τομή έχουν ακέραιες τιμές.

Άσκηση 3

Αποδείξτε το Θεώρημα Lagrange. Ειδικότερα, αποδείξτε ότι για πεπερασμένη ομάδα G , και υποομάδα $H \subseteq G$, δύο (δεξιά) σύμπλοκα της H είτε ταυτίζονται είτε είναι ξένα μεταξύ τους, και έχουν ίδια πληθικότητα με την H .

Άσκηση 4

Bonus άσκηση (προαιρετική): https://courses.corelab.ntua.gr/pluginfile.php/494/mod_resource/content/2/BONUS_CRYPT0.pdf

Σημείωση: αγνοήστε την ημερομηνία παράδοσης που αναγράφεται στην εκφώνηση.

Άσκηση 5

Αποδείξτε ότι στην περίπτωση όπου $n = p^e$, $e > 1$, p πρώτος, ο έλεγχος Miller-Rabin (ουσιαστικά ο έλεγχος Fermat) επιτυγχάνει με πιθανότητα $> 1/2$. Συγκεκριμένα, αποδείξτε ότι για περισσότερα από τα μισά $b \in \mathbb{Z}_n$: $b^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$.

Υπόδειξη: θεωρήστε γνωστό το γεγονός ότι η ομάδα $U(\mathbb{Z}_n)$ είναι κυκλική για $n = p^e$, $e > 0$, p περιττό.

Άσκηση 6

Διατυπώστε παραμετρικό αλγόριθμο για το πρόβλημα Dominating Set με παράμετρο το μέγεθος του κυρίαρχου συνόλου. Είναι ο αλγόριθμός σας FPT; Εξηγήστε. Αλλάζει κάτι αν θεωρήσουμε ως παράμετρο και τον μέγιστο βαθμό του γράφου εισόδου Δ ;

Άσκηση 7

Διατυπώστε έναν FPT αλγόριθμο για το πρόβλημα q -coloring (αν ένας γράφος μπορεί να χρωματιστεί με q χρώματα, q σταθερά, ανεξάρτητη της εισόδου) με παράμετρο το treewidth k . Θεωρήστε ότι σας δίνεται και η αντίστοιχη tree decomposition [1, Άσκηση 7.18.c].

Άσκηση 8

Bonus άσκηση (προαιρετική): λύστε την Άσκηση 7.24 από το [1]. Θα χρειαστεί να μελετήσετε, μεταξύ άλλων, τις ενότητες 2.5, 3.1 και 3.2.

Αναφορές

- [1] Marek Cygan, Fedor V. Fomin, Lukasz Kowalik, Daniel Lokshtanov, Dániel Marx, Marcin Pilipczuk, Michal Pilipczuk, and Saket Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Springer, 2016.