ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ **ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ**
Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης
Εαρινό εξάμηνο 2020

2η σειρά ασκήσεων **Προθεσμία παράδοσης: 28 Μαΐου 2021**

Πρόβλημα 1. (12 μονάδες) Θεωρούμε το εξής παίγνιο που αναφέρεται συνήθως ως δημοπρασία “all-pay”: Υπάρχουν 2 παίκτες, και μία ποσότητα ενός αγαθού προς πώληση που και για τους 2 έχει την ίδια χρηματική αξία $K > 0$. Οι 2 παίκτες υποβάλλουν σφραγισμένες προσφορές για τη συνολική ποσότητα, οι οποίες μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί στο διάστημα $[0, K]$. Νικητής στη δημοπρασία είναι ο παίκτης που δηλώνει τη μεγαλύτερη προσφορά. Οι διαφορές με τις δημοπρασίες που είδαμε στο μάθημα είναι: (i) ότι σε περίπτωση ίσων προσφορών, οι 2 παίκτες παίρνουν τη μισή ποσότητα ο καθένας, η οποία έχει αξία $K/2$, και (ii) ότι ανεξάρτητα με το ποιος κερδίζει, και οι 2 παίκτες πληρώνουν αυτό που δήλωσαν. Τέτοια παίγνια μοντελοποιούν ορισμένες καταστάσεις ανταγωνισμού για την ανάπτυξη ενός νέου προϊόντος. Περιπτώσεις π.χ. όπου και οι δύο εταιρείες πληρώνουν κάποιο κόστος για την επένδυση και την ανάπτυξη του προϊόντος, αλλά μόνο η μία από αυτές υπερισχύει στην αγορά μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ένα τέτοιο παίγνιο.

(i) (4 μονάδες) Να εκφράσετε μαθηματικά τις συναρτήσεις ωφέλειας (utility functions) των 2 παικτών, $u_1(b_1, b_2)$, και $u_2(b_1, b_2)$, όπου $u_1(b_1, b_2)$ είναι η ωφέλεια του παίκτη 1, όταν ο ίδιος δηλώνει b_1 και ο παίκτης 2 δηλώνει b_2 (και αντίστοιχα για τον παίκτη 2).

(ii) (8 μονάδες) Να δείξετε ότι το παίγνιο αυτό δεν έχει σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές.

Πρόβλημα 2. (8 μονάδες) Θεωρούμε τις Knapsack δημοπρασίες που είδαμε στο μάθημα. Έστω όμως ότι τώρα έχουμε 2 knapsacks με χωρητικότητες k και k'. Μια εφικτή ανάθεση στην αντίστοιχη δημοπρασία είναι οποιοδήποτε σύνολο παικτών S που μπορεί να χωριστεί σε 2 υποσύνολα $S = S_1 \cup S_2$ έτσι ώστε το S_1 να είναι εφικτή λύση για το πρώτο knapsack ($\sum_{i \in S_1} w_i \le k$) και αντίστοιχα το S_2 να είναι εφικτή λύση για το δεύτερο knapsack ($\sum_{i \in S_1} w_i \le k'$).

Θεωρούμε τον εξής αλγόριθμο ανάθεσης: Τρέχουμε πρώτα τον άπληστο αλγόριθμο (με βάση τον λόγο bid b_i προς μέγεθος w_i) με όλους τους παίκτες για το πρώτο knapsack. Στη συνέχεια με τους παίκτες που περίσσεψαν, τρέχουμε τον ίδιο αλγόριθμο για το δεύτερο knapsack. Να εξετάσετε αν αυτός ο αλγόριθμος είναι μονότονος.

Πρόβλημα 3. (10 μονάδες) Η δημοτική αρχή μελετά την κατασκευή ενός νέου πάρκου, το οποίο αναμένεται να κοστίσει C ευρώ. Κάθε δημότης i, $i = 1, \ldots, n$, εκτιμά την ωφέλειά του από το νέο πάρκο σε $v_i \ge 0$ ευρώ, τιμή που είναι γνωστή μόνο στον ίδιο. Η δημοτική αρχή ζητάει από τους δημότες να δηλώσουν τις εκτιμήσεις τους $v_1, \ldots, v_n$, και θα προχωρήσει στην κατασκευή του πάρκου μόνο αν $\sum_{i=1}^{n} v_i \ge C$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε δημότης θα πληρώσει μια εισφορά $p_i \ge 0$. Η εισφορά έχει στόχο οι δημότες να δηλώσουν τις πραγματικές τους εκτιμήσεις, και όχι να καλύψει το συνολικό κόστος του πάρκου. Να σχεδιάσετε έναν φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα.

Πρόβλημα 4. (16 μονάδες) Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ όπου κάθε ακμή e "ανήκει" σε διαφορετικό παίκτη A_e και έχει πραγματικό κόστος $c_e > 0$, το οποίο είναι γνωστό μόνο στον A_e. Υποθέτουμε ότι καμία ακμή του G δεν είναι γέφυρα. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα συνδετικό δέντρο με ελάχιστο συνολικό κόστος.

(i) (8 μονάδες) Να διατυπώσετε φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα. Αρχικά κάθε παίκτης A_e υποβάλει μια σφραγισμένη προσφορά b_e στον μηχανισμό για την ακμή e που του ανήκει. Με βάση τις προσφορές b_e, ο μηχανισμός υπολογίζει ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο T και την αμοιβή p_e κάθε παίκτη A_e. Κάθε παίκτης A_e επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του u_e, η οποία είναι $u_e = p_e$, αν $e \notin T$, και $u_e = p_e - c_e$, αν $e \in T$. Για κάθε παίκτη A_e, ο μηχανισμός πρέπει να εξασφαλίζει ότι $u_e \geq 0$ και ότι ανεξάρτητα από τις προσφορές των άλλων παικτών, η ειλικρινής προσφορά $b_e = c_e$ μεγιστοποιεί το u_e.

(ii) (4 μονάδες) Ποια ιδιότητα πρέπει να έχει το γράφημα G ώστε ο αλγόριθμός σας να είναι φιλαλήθης; Να δώσετε παράδειγμα συνεκτικού γραφήματος για το οποίο ο μηχανισμός που διατυπώσατε δεν είναι φιλαλήθης.

(iii) (4 μονάδες) Να γενικεύσετε τον μηχανισμό που προτείνατε για την περίπτωση που οι παίκτες μπορεί να έχουν στην κατοχή τους περισσότερες από μία ακμές (να θεωρήσετε ότι κάθε ακμή ανήκει σε έναν και μόνο παίκτη). Ποια είναι η ιδιότητα που απαιτείται ώστε ο μηχανισμός που προτείνατε να είναι φιλαλήθης;

Πρόβλημα 5. (8 μονάδες) Θεωρούμε μια δημοπρασία VCG για δύο αγαθά, το a και το b. Να υπολογίσετε αρχικά την βέλτιστη ανάθεση και τις αντίστοιχες VCG πληρωμές για δύο παίκτες, τον πρώτο με συνάρτηση αποτίμησης $v_1(\{a, b\}) = 1$ και $v_1(\{a\}) = v_1(\{b\}) = v_1(\emptyset) = 0$, και τον δεύτερο με συνάρτηση αποτίμησης $v_2(\{a, b\}) = v_2(\{a\}) = 1$ και $v_2(\{b\}) = v_2(\emptyset) = 0$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την βέλτιστη ανάθεση και τις αντίστοιχες VCG πληρωμές, αν έχουμε και τρίτο παίκτη με συνάρτηση αποτίμησης $v_3(\{a, b\}) = v_3(\{b\}) = 1$ και $v_3(\{a\}) = v_3(\emptyset) = 0$. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις πληρωμές;

Πρόβλημα 6. (26 μονάδες) **(i)** (8 μονάδες) Έχουμε n παίκτες στους οποίους θα μοιράσουμε N κομμάτια σοκολάτας. Το βάρος κάθε κομματιού i είναι α_i γραμμάρια, με $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0$. Κάθε παίκτης j έχει ωφέλεια $v_j > 0$ για κάθε γραμμάριο σοκολάτας που θα πάρει (π.χ., αν ο παίκτης j πάρει τα κομμάτια 1 και 2, η συνολική ωφέλειά του θα είναι $v_j(\alpha_1 + \alpha_2)$). Θεωρούμε ότι $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n > 0$, ότι το v_j είναι ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη j, ότι κάθε παίκτης j διεκδικεί w_j κομμάτια σοκολάτας (θεωρούμε ότι το w_j είναι δημόσια γνωστό), και ότι $N = \sum_{j=1}^{n} w_j$ (η υπόθεση για το N είναι χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού μπορεί κάποια από τα τελευταία κομμάτια σοκολάτας να έχουν μηδενικό βάρος). Αρχικά υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης j μπορεί να πάρει οσαδήποτε, από 0 μέχρι και w_j, κομμάτια σοκολάτας. Να διατυπώσετε έναν φιλαλήθη μηχανισμό, περιγράφοντας ποια κομμάτια σοκολάτας θα πάρει κάθε παίκτης και πόσο θα πληρώσει για αυτά. Ο μηχανισμός σας πρέπει να μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια. Είναι ο μηχανισμός που προτείνατε individually rational;

(ii) (8 μονάδες) Παραλλάσσουμε το (ii) ως εξής: έχουμε μόνο $K < N$ κομμάτια σοκολάτας μοναδιαίου βάρους (άρα τώρα $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_K = 1$ και $\alpha_{K+1} = \cdots = \alpha_N = 0$) και κάθε παίκτης μπορεί πλέον να πάρει είτε 0 είτε w_j κομμάτια σοκολάτας. Τι συμβαίνει αν εφαρμόσουμε την λύση του (i) σε αυτή την παραλλαγή του προβλήματος; Πιστεύετε ότι υπάρχει μηχανισμός που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, είναι φιλαλήθης, individually rational και υπολογιστικά αποδοτικός; Αν ναι να τον διατυπώσετε και να τον αναλύσετε, αν όχι, να το αιτιολογήσετε κατάλληλα.

(iii) (10 μονάδες) Παραλλάσσουμε το (ii) ως εξής: το πλήθος w_j των κομματιών που διεκδικεί κάθε παίκτης j είναι και αυτό ιδιωτική πληροφορία και η συνάρτηση αποτίμησης κάθε παίκτη j είναι $h_j(x) = \min\{xv_j, w_j v_j\}$. Συνεχίζει ο μηχανισμός του (i) να είναι φιλαλήθης για αυτή την παραλλαγή του προβλήματος; Αν όχι, να διατυπώσετε μηχανισμό που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, είναι φιλαλήθης και individually rational για αυτή την παραλλαγή.

Πρόβλημα 7. (15 μονάδες) Θεωρούμε μια δημοπρασία με 1 αγαθό και 2 παίκτες. Η αξία (valuation) των παικτών για το αγαθό προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

(i) (5 μονάδες) Να δείξετε ότι το αναμενόμενο κέρδος από την δημοπρασία Vickrey είναι $1/3$.

(ii) (5 μονάδες) Έστω ότι χρησιμοποιούμε δημοπρασία Vickrey με reserve price το $1/2$. Να υπολογίσετε το αναμενόμενο κέρδος σε αυτή την περίπτωση και να το συγκρίνετε με το αναμενόμενο κέρδος της προηγούμενης περίπτωσης.

(iii) (5 μονάδες) Να υπολογίσετε το αναμενόμενο κέρδος από την δημοπρασία Vickrey για 3 παίκτες όπως οι παραπάνω.

Πρόβλημα 8. (5 μονάδες) Να υπολογίσετε την virtual valuation function για την κατανομή με cdf $F(z) = 1 - \frac{1}{(z+1)^c}$, όπου $z \in [0, \infty)$ και $c > 0$. Για ποιες τιμές του c η κατανομή αυτή είναι regular;