Κρυπτοσυστήματα Διακριτού Λογαρίθμου

Παναγιώτης Γροντάς - Άρης Παγουρτζής

[redacted]

ΕΜΠ - Κρυπτογραφία [redacted]

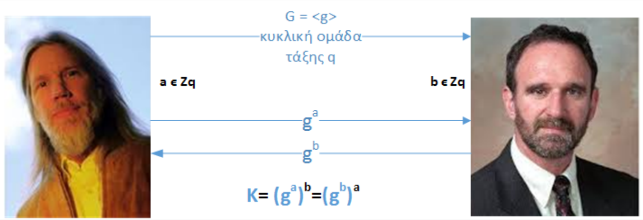
Περιεχόμενα

- Διακριτός Λογάριθμος: Προβλήματα και Αλγόριθμοι
- Το κρυπτοσύστημα ElGamal (Ορισμός, Ασφάλεια, Παραλλαγές)
- Σχήματα Δέσμευσης με βάση το DLP

DLP

Το πρωτόκολλο DHKE

Αντί για Alice και Bob...



Πρωτόκολλο **Δημιουργίας** Κλειδιού

Απαιτήσεις:

Ασφάλεια: Ύψωση σε δύναμη - μονόδρομη συνάρτηση στην $\mathbb{G}$

Συνήθως: $\mathbb{G}$ υποομάδα του $\mathbb{Z}_p^*$ με p πρώτο ή ελλειπτικές καμπύλες

Εφαρμογές: SSL, TLS, IPSEC

Ασφάλεια DHKE - Πρόβλημα DLP

DLP - Το πρόβλημα του Διακριτού Λογάριθμου
Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ τάξης q και ένα τυχαίο στοιχείο $y \in \mathbb{G}$

Να υπολογιστεί $x \in \mathbb{Z}_q$ ώστε $g^x = y$
δηλ. το $log_g y \in \mathbb{Z}_q$

Αγνοούμε δεδομένα στο πρωτόκολλο DHKE

Ασφάλεια DHKE - Πρόβλημα CDHP

CDHP $\leq^{P}$ DLP

CDHP - Το υπολογιστικό πρόβλημα Diffie Hellman
Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$, δύο στοιχεία

$y_1 = \underline{g^{x_1}}, y_2 = \underline{g^{x_2}}$

Να υπολογιστεί το $\boxed{g^{x_1 \cdot x_2}}$

Ασφάλεια DHKE - Πρόβλημα DDHP

Μπορούμε να δοκιμάζουμε τυχαία στοιχεία

DDHP - Το πρόβλημα απόφασης Diffie Hellman
Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$, δύο στοιχεία

$y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$ και κάποιο $y \in \mathbb{G}$

Να εξεταστεί αν $y = g^{x_1 \cdot x_2}$

ή ισοδύναμα

DDHP - Το πρόβλημα απόφασης Diffie Hellman
Δίνεται μια κυκλική ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$, δύο στοιχεία

$y_1 = g^{x_1}, y_2 = g^{x_2}$ και κάποιο $y \in \mathbb{G}$

Μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις τριάδες $(\underline{g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}})$ και $(\underline{g^{x_1}, g^{x_2}}, y)$;

DDH σε μορφή παιγνίου $DDH - Game$

Κοινή είσοδος: παράμετρος ασφάλειας λ.

Λειτουργίες $\mathcal{C}$

- Παραγωγή: $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ τάξης πρώτου q.
- Επιλογή τυχαίων $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_q$, $y \in G$
- Υπολογισμός $g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}$
- Επιλογή τυχαίου bit $b \in \{0, 1\}$
- Αν $b = 0$ τότε αποστολή $\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, y' = g^{x_1 x_2}$ στον $\mathcal{A}$
- Αν $b = 1$ τότε αποστολή $\mathbb{G}, \underline{g^{x_1}, g^{x_2}, y' = y}$ στον $\mathcal{A}$

Ο $\mathcal{A}$ υπολογίζει b'.

Αν $b' \neq b$ τότε το αποτέλεσμα του παιχνιδιού είναι 0, αλλιώς 1

DDH σε μορφή παιγνίου $DDH - Game$ (2)

Πλεονέκτημα $\mathcal{A}$:

$$Adv_{\mathcal{A}}^{DDH-Game} = |Pr[DDH - Game(\mathcal{A}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}) = 1)] - Pr[DDH - Game(\mathcal{A}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, y) = 1)]|$$

Η υπόθεση DDH ισχύει αν $\forall$ PPT:

$\mathcal{A}$: $Adv_{\mathcal{A}}^{DDH}(\lambda) = negl(\lambda)$

Σχέσεις Προβλημάτων

$CDHP \leq DLP$
Αν μπορούμε να λύσουμε το DLP, τότε μπορούμε να υπολογίζουμε τα x_1, x_2 από τα y_1, y_2 και στην συνέχεια το $g^{x_1 \cdot x_2}$

$DDHP \leq CDHP$
Αν μπορούμε να λύσουμε το $CDHP$, υπολογίζουμε το $g^{x_1 \cdot x_2}$ και ελέγχουμε ισότητα με το y

Δηλαδή: $DDHP \leq CDHP \leq DLP$

Δεν γνωρίζουμε αν ισχύει η αντίστροφη σειρά - ισοδυναμία
Όμως: Υπάρχουν ομάδες όπου το $DDHP$ έχει αποδειχθεί εύκολο, ενώ $CDHP$ δεν έχει αποδειχθεί εύκολο
Μάλλον: $DDHP < CDHP$

Ασφάλεια DHKE

Μοντέλο ασφάλειας: παθητικός αντίπαλος $\mathcal{A}$

Διαίσθηση
Ο $\mathcal{A}$ δεν αποκτά καμία χρήσιμη πληροφορία για το κλειδί που δημιουργείται.

Ισοδύναμα

Ο $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να διακρίνει το κλειδί από ένα τυχαίο στοιχείο της ομάδας στην οποία ανήκει

Παιχνίδι ανταλλαγής κλειδιού $KEG(\lambda, \mathcal{A}, \Pi)$

Κοινή είσοδος: λ. Λειτουργίες $\mathcal{C}$:

- Δημιουργεί ομάδα $\mathbb{G}$
- Εκτελεί το πρωτοκόλλο $\Pi(1^\lambda)$
- Παράγεται: (τ, k)
  - τ: Τα μηνύματα που ανταλλάσσονται (δημόσια)
  - k: Το κλειδί που παράγεται (ιδιωτικό)
- Επιλογή τυχαίου $b \in \{0, 1\}$
- Αν $b = 0$ επιλογή τυχαίου k' και αποστολή (τ, k') στον $\mathcal{A}$
- Αν $b = 1$ αποστολή (τ, k) στον $\mathcal{A}$

Ο $\mathcal{A}$ υπολογίζει b'. Αν $b' \neq b$ τότε το αποτέλεσμα του παιχνιδιού είναι 0, αλλιώς 1

Πλεονέκτημα $\mathcal{A}$:
$$Adv_{\mathcal{A},\Pi}^{KEG}(\lambda) = |Pr[KEG_{\Pi}(\mathcal{A}(\tau, k) = 1)] - Pr[KEG_{\Pi}(\mathcal{A}(\tau, k') = 1)]|$$

Ορισμός ασφάλειας DHKE

Ένα πρωτόκολλο ανταλλαγής κλειδιού Π είναι ασφαλές, αν κάθε PPT *παθητικός* αντίπαλος $\mathcal{A}$ έχει αμελητέο πλεονέκτημα ως προς την παράμετρο ασφάλειας να επιτύχει στο *KEG*

$Adv_{\mathcal{A},\Pi}^{KEG}(\lambda) = negl(\lambda)$

Απόδειξη ασφάλειας DHKE

Αν το DDHP είναι δύσκολο, τότε το πρωτόκολλο DHKE είναι ασφαλές (απέναντι σε παθητικό αντίπαλο)

Απόδειξη - Σχεδιάγραμμα DHKE μη ασφαλές: $\exists \mathcal{A}$ ώστε $Adv_{\mathcal{A}}^{KEG}(\lambda) = non - negl(\lambda)$

Θα κατασκευάσουμε αντίπαλο PPT $\mathcal{B}$ ο οποίος παραβιάζει την *DDH* με μη αμελητέο πλεονέκτημα.

Ο $\mathcal{B}$ λειτουργεί ως εξής:

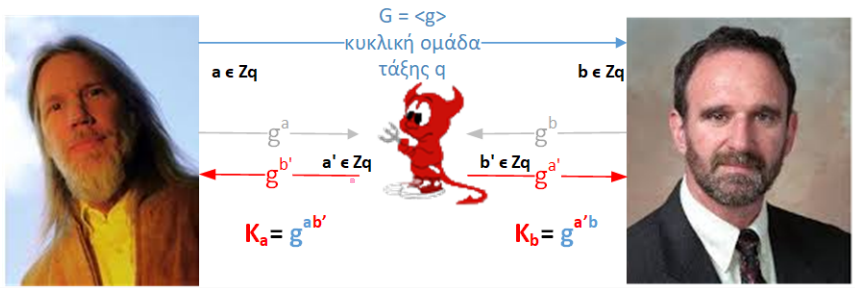
- Όταν λάβει το μήνυμα από τον $\mathcal{C}_{DDH}$ το προωθεί στον $\mathcal{A}$
- Μορφή μηνύματος $(\tau, k') = ((\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2})), y')$
- Όταν ο $\mathcal{A}$ απαντήσει, προωθεί το b'.

$$Adv_{\mathcal{B}}^{DDH-Game} = |Pr[DDH - Game(\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, g^{x_1 x_2}) = 1)] - Pr[DDH - Game(\mathcal{B}(\mathbb{G}, g^{x_1}, g^{x_2}, y) = 1)] = |Pr[KEG_{DHKE}(\mathcal{A}(\tau, k) = 1)] - Pr[KEG_{DHKE}(\mathcal{A}(\tau, k') = 1)]| = non - negl(\lambda)$$

Άτοπο

Ενεργοί Αντίπαλοι

Η σημασία του μοντέλου ασφάλειας - Man In The Middle Attacks



Πώς είμαι σίγουρος ότι μιλάω με αυτόν που *νομίζω* ότι μιλάω;
Λύση: ψηφιακές υπογραφές - ψηφιακό πιστοποιητικό (εγγύηση 'έμπιστου' τρίτου)

Επιλογή Ομάδας

- Καθορίζει τη δυσκολία του προβλήματος
- Δύο επιλογές:
    - $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ με p πρώτο (σε υποομάδα)
    - Λόγοι:
        - Δυσκολότερο το DLP
        - Τετριμμένη εύρεση γεννήτορα (όλα τα στοιχεία εκτός από το 1) - για υποομάδα τάξης πρώτου q
        - Εύκολη εύρεση αντίστροφου
    - $(\mathcal{E}(\mathbb{F}_p), +)$ (Ελλειπτικές καμπύλες: 'Λογάριθμος' αφορά πρόσθεση)
        - ίδια επίπεδα ασφάλειας με μικρότερη τιμή παραμέτρου ασφάλειας

Αλγόριθμοι DL

Brute Force
Για ομάδα $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ τάξης q λ bits

Δοκιμή όλων των $x \in \mathbb{Z}_q$ μέχρι να βρεθεί τέτοιο ώστε $g^x = y$

Πολυπλοκότητα $O(2^\lambda)$

Γενικευμένη μέθοδος - δεν εξαρτάται απο χαρακτηριστικά ομάδας

Αλγόριθμος Baby step - Giant Step (Shanks)

Αλγόριθμος Meet-In-The Middle

- Στόχος: εύρεση $x : y = g^x$
- Βασική ιδέα: $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists k, a, b \in \mathbb{Z} : \ x = ak + b$,
- $y = g^x \Rightarrow \boxed{y = g^{ak} \cdot g^b} \Rightarrow \boxed{yg^{-ak} = g^b}$
- Θα υπολογίζουμε g^b και yg^{-ak} μέχρι να συναντηθούν
  1. Ξεκινάμε στη 'μέση': $\boxed{k = \lceil \sqrt{q} \rceil}$
  2. **Baby steps - μέγεθος** 1:
     Υπολογίζουμε $g^b, b \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ και αποθηκεύουμε
  3. **Giant steps - μέγεθος** k:
     Υπολογίζουμε $\boxed{yg^{-ak}}, a \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ και το αναζητούμε στα αποτελέσματα του Βημ. 2
  4. Όταν βρεθεί υπολογίζουμε: $x = ak + b$

$0 \leq a \leq \left\lfloor \frac{q}{k} \right\rfloor$

$0 \leq b < k$

Πολυπλοκότητα Χρόνου: $O(2^{\frac{\lambda}{2}})$ - Βέλτιστη για γενικευμένο

Πολυπλοκότητα Χώρου: $O(2^{\frac{\lambda}{2}})$ - Βέλτιστη αυτή του Pollard rho σταθερή

Παράδειγμα Baby step - Giant Step

Θέλουμε το $2^x = 17 \pmod{29}$ στο $\mathbb{Z}_{29}^* = \langle 2 \rangle$, $\lceil \sqrt{29} \rceil = 6$

- $b \in \{0 \cdots 5\}$
- $2^0 = 1 \pmod{29}$
- $2^1 = 2 \pmod{29}$
- $2^2 = 4 \pmod{29}$
- $2^3 = 8 \pmod{29}$
- $2^4 = 16 \pmod{29}$
- $2^5 = 3 \pmod{29}$

- $a \in \{0 \cdots 5\}$
- $17 \cdot 2^{-0 \cdot 6} = 17 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^{-1 \cdot 6} = 37 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^{-2 \cdot 6} = 19 \pmod{29}$
- $17 \cdot 2^{-3 \cdot 6} = 8 \pmod{29}$
- Βρέθηκε

Άρα $x = 18 + 3 = 21$

Πράγματι: $2^{21} = 17 \pmod{29}$

Αλγόριθμος Pohlig-Hellman - Ιδέα

$\mathbb{Z}_{73}^*$: $p-1 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$

έστω $y = g^x$, $x \bmod 8$? $x = 8 \cdot \lambda + r$, $r < 8$

Παρατήρηση
Η δυσκολία του DLP σε μια ομάδα $\mathbb{G}$ εξαρτάται από τη δυσκολία του στις διάφορες υποομάδες της.

Συγκεκριμένα

1. Παραγοντοποίηση της τάξης
(πχ. στο $\mathbb{Z}_p^*$: $p - 1 = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$ με p_i πρώτο)
2. Επίλυση DLP σε κάθε υποομάδα και συνδυασμός με CRT

Smooth Number
Μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε μικρούς πρώτους - Αν ισχύει για την τάξη επιταχύνει σημαντικά τον αλγόριθμο

$y = g^{8\lambda + r}$
$= g^{8\lambda} \cdot g^r$

$y^9 = g^{72 \cdot \lambda} \cdot g^{9 \cdot r} = \underbrace{(g^9)}_{g'}{}^{r}$

$r = b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + b_0$

$y^9 = g'^{r}$
$= g^{b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2 + b_0}$

$\mathrm{ord}(g') = 8$

Αλγόριθμος Pohlig-Hellman

- Παραγοντοποιούμε την τάξη: $p-1=\prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$
- Για κάθε p_i γράφουμε $x = a_0 + a_1 p_i + \cdots + a_{e_i - 1} p_i^{e_i - 1} \pmod{p_i^{e_i}}$ με $a_j \in \{0, \cdots, p_i - 1\}$
- Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές ως εξής:
- Για το a_0 ισχύει: $y^{\frac{p-1}{p_i}} = g^{a_0 \frac{p-1}{p_i}} \pmod{p}$ (1) επειδή:

$$\begin{aligned} y^{\frac{p-1}{p_i}} = (g^x)^{\frac{p-1}{p_i}} = g^{(a_0 + a_1 p_i + \cdots + a_{e_i - 1} p_i^{e_i - 1}) \frac{p-1}{p_i}} &= \\ g^{(a_0 + K p_i) \frac{p-1}{p_i}} = g^{a_0 \frac{p-1}{p_i}} g^{K p_i \frac{p-1}{p_i}} &= \\ g^{a_0 \frac{p-1}{p_i}} \pmod{p} \end{aligned}$$

- Υπολογισμός a_0 (πχ. με αλγόριθμο Shanks)

Αλγόριθμος Pohlig-Hellman

- Για τον υπολογισμό των υπόλοιπων συντελεστών:
  - Δημιουργούμε ακολουθία $\{y_j\}$ με $y_0 = y$ και
  - $y_j = y_{j-1} \cdot g^{-(a_0+a_1 p_i+\cdot+a_{j-1} p_i^{j-1})} \pmod{p}$
  - Γενικεύοντας την (1) έχουμε: $y_j^{\frac{p-1}{p_i^{j+1}}} = g^{a_j \frac{p-1}{p_i}}$
  - Υπολογίζουμε το a_j
- Συνδυασμός λύσεων με CRT

Pohlig-Hellman - παράδειγμα

Θέλουμε το $2^x = 17 \pmod{29}$ στο $\mathbb{Z}_{29}^* = \langle 2 \rangle$
Παραγοντοποιούμε την τάξη: $28 = 2^2 7$

$x_2 = a_0 + 2a_1 \pmod{4}$ και

$x_7 = a_0 \pmod{7}$

Υπολογισμός a_0 για το x_2
$y^{\frac{p-1}{2}} = g^{a_0 \frac{p-1}{2}} \Rightarrow 17^{14} = 2^{14a_0} \Rightarrow 2^{14a_0} = 28 = -1 \pmod{29}$

Άρα $a_0 = 1$

Υπολογισμός y_1 για το x_2
$y_1 = yg^{-a_0} = 17 \cdot 2^{-1} = 17 \cdot 15 = 23 \pmod{29}$

Pohlig-Hellman - παράδειγμα

Υπολογισμός a_1 **για το** x_2
$y_1^{\frac{p-1}{4}} = g^{a_1 \frac{p-1}{2}} \Rightarrow 23^7 = 2^{14a_1} \Rightarrow 2^{14a_1} = 1 \pmod{29}$
Άρα $a_1 = 0$

Άρα $x_2 = 1 + 0 = 1 \pmod{4}$

Υπολογισμός a_0 **για το** x_7
$y^{\frac{p-1}{7}} = g^{a_0 \frac{p-1}{7}} \Rightarrow 17^4 = 2^{4a_0} \Rightarrow 2^{4a_0} = 1 \pmod{29}$
Άρα $a_0 = 0$

Άρα $x_7 = 0 \pmod{7}$

Από $x_2 = 1 + 0 = 1 \pmod{4}$ και $x_7 = 0 \pmod{7}$ με CRT
προκύπτει $x = 21$

Δυσκολία DDHP

$(g^{2\lambda+1})^{(p-1)/2} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \;\|\; \mathbb{Z}_{17}^*, \; g=2, \; 2^8 \equiv 1 \ (17)$

Θεώρημα
Το DDHP δεν είναι δύσκολο στην $\mathbb{Z}_p^*$

$y = 15 \equiv 2^x \bmod 17$

Μπορεί να κατασκευαστεί αποδοτικός αλγόριθμος διαχωρισμού τριάδας DH g^a, g^b, g^{ab} από μια τυχαία τριάδα g^a, g^b, g^c.
Πώς: Χρησιμοποιώντας το σύμβολο Legendre.

$\mathbb{Z}_{23}$

Το σύμβολο Legendre διαρρέει το DLP parity

$g' = g^2$

Από τον ορισμό: $(\frac{g^x}{p}) = (g^x)^{\frac{p-1}{2}}$
Όμως: $g^{p-1} = 1 \pmod p$
Άρα: $g^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod p$
Δηλαδή: $(\frac{g^x}{p}) = (-1)^x$
Αν x μονός τότε $(\frac{g^x}{p}) = -1$
Αν x ζυγός τότε $(\frac{g^x}{p}) = 1$

$\text{ord}(g') = 11$

$G = \langle g'$

Δυσκολία DDHP

Για τυχαία τριάδα: $Prob[(\frac{g^c}{p}) = 1] = \frac{1}{2}$

Για τριάδα DH: $Prob[(\frac{g^{ab}}{p}) = 1] = \frac{3}{4}$

Algorithm 1 Ο αλγόριθμος διαχωρισμού

```
Υπολόγισε $(\frac{g^a}{p}), (\frac{g^b}{p}), (\frac{g^c}{p})$
if $(\frac{g^c}{p}) = 1 \wedge ((\frac{g^a}{p}) = 1 \vee (\frac{g^b}{p}) = 1)$ then
    Επιστροφή ”Τριάδα Diffie Hellman”
else
    Επιστροφή ”Τυχαία Τριάδα”
end
```

Πλεονέκτημα: $\frac{3}{8}$ (γιατί;)

ΜΗ ΑΜΕΛΗΤΕΟ

Επιλογή του $\mathbb{G}$

Συνέπειες

Δουλεύουμε σε μεγάλη υποομάδα του $\mathbb{Z}_p^*$ με τάξη πρώτο q

Για παράδειγμα:

Επιλογή safe prime: $p = 2q + 1$ με q πρώτο

Δουλεύουμε στην υποομάδα τετραγωνικών υπολοίπων τάξης q

Επιλογή schnorr primes $p = k \cdot q + 1$ με q πρώτο

Παρ' όλα αυτά: Υποεκθετικοί αλγόριθμοι (index calculus)

Μεγέθη

Symmetric Security	$\|p\|$	$\|q\|$
80 bits	1024	160
112 bits	2048	224
128 bits	3072	256
192 bits	7680	384
256 bits	15360	512

Το κρυπτοσύστημα ElGamal

Ορισμός ElGamal

Δημιουργία Κλειδιών: $KeyGen(1^\lambda) = (y = g^x, x)$

- Επιλογή δύο μεγάλων πρώτων p, q ώστε $q \mid (p-1)$
- $\mathbb{G}$: υποομάδα τάξης q του $\mathbb{Z}_p^*$ - g γεννήτορας
- Ιδιωτικό κλειδί: τυχαίο $x \in \mathbb{Z}_q$
- Δημόσιο κλειδί: $y = g^x \bmod p$
- Επιστροφή (y, x)

g_0 γενν. του $\mathbb{Z}_p^*$

$G = \langle g \rangle = \{g^i \mid i \in \mathbb{Z}_q\}$

$(0 \le i < q)$

Κρυπτογράφηση

- Επιλογή τυχαίου $r \in \mathbb{Z}_q$
- $\mathtt{Encrypt}_y(r, m) = (g^r \bmod p, m \cdot y^r \bmod p)$

Αποκρυπτογράφηση

- $\mathtt{Decrypt}_x(a, b) = \frac{b}{a^x}$

Ορθότητα $\mathtt{Decrypt}_x(\mathtt{Encrypt}_y(r, m)) = \frac{my^r}{(g^r)^x} = m$

Πρακτικά Θέματα

Πιθανοτική Κρυπτογράφηση: Ένα μήνυμα έχει πολλά πιθανά κρυπτοκείμενα

Message expansion Κρυπτοκείμενο διπλάσιο του μηνύματος

Επιτάχυνση Κρυπτογράφησης
Κόστος: 2 υψώσεις σε δύναμη - 1 πολλαπλασιασμός

Ύψωση σε δύναμη:Δεν εξαρτάται από το μήνυμα (precomputation)

Ασφάλεια Κρυπτογράφησης

Μυστικότητα ElGamal $\equiv$ *CDHP*
Αντιστοιχία δημοσίων στοιχείων

$$\begin{aligned} g^{x_1} &\equiv g^r \\ g^{x_2} &\equiv y = g^x \\ g^{x_1 x_2} &\equiv y^r \end{aligned}$$

$EG \leq CDHP$: $CDHP \Rightarrow$ Υπολογισμός $g^{x_1 x_2} = y^r \Rightarrow$ αποκρυπτογράφηση (με εύρεση αντιστρόφου του y^r)
$CDHP \leq EG$: $EG \Rightarrow$
Για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{G}$:
εύρεση m που αντιστοιχεί στο $g^{x_2}, (g^{x_1}, c)$ (χρήση EG ως oracle αποκρυπτογράφησης με δημόσιο κλειδί g^{x_2})
Υπολογισμός $g^{x_1 x_2} = \frac{c}{m}$

Επανάληψη τυχαιότητας → Επίθεση KPA

KPA: Γνωρίζουμε ζεύγη μηνυμάτων - κρυπτοκειμένου για τα οποία έχει χρησιμοποιηθεί η ίδια τυχαιότητα

Επίθεση

$$(c_r, c_1) = \mathtt{Encrypt}_y(r, m_1) = (g^r \bmod p, m_1 \cdot y^r \bmod p)$$

$$(c_r, c_2) = \mathtt{Encrypt}_y(r, m_2) = (g^r \bmod p, m_2 \cdot y^r \bmod p)$$

Αν γνωρίζω το (m_1, c_1): $c_1 = m_1 \cdot y^r \bmod p \Rightarrow y^r = c_1 \cdot m_1^{-1}$

Μπορώ να υπολογίσω το m_2 ως: $m_2 = \frac{c_2}{y^r} = \frac{c_2}{c_1 \cdot m_1^{-1}}$

Ασφάλεια σε επιθέσεις CPA

Θεώρημα
Αν το DDHP είναι δύσκολο, τότε το κρυπτοσύστημα El Gamal διαθέτει ασφάλεια IND-CPA.

Απόδειξη:

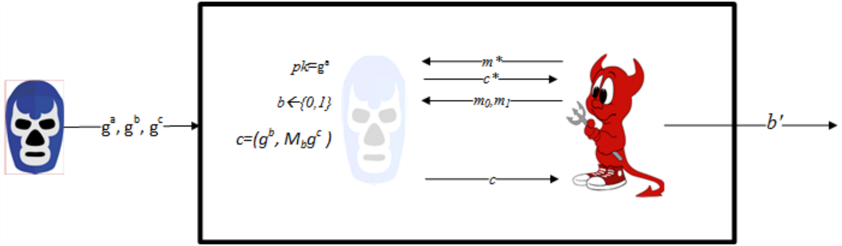
Έστω ότι το ElGamal δεν διαθέτει ασφάλεια IND-CPA.

Άρα $\exists \mathcal{A}$, ο οποίος μπορεί να νικήσει στο παιχνίδι CPA με μη αμελητέα πιθανότητα.

Κατασκευή $\mathcal{B}$:

- Είσοδος: τριάδα στοιχείων
- Εσωτερικά: Προσομοίωση του $\mathcal{C}$ στο παιχνίδι CPA και χρήση $\mathcal{A}$
- Αποτέλεσμα: Ξεχωρίζει DH τριάδα από τυχαία

Ασφάλεια σε επιθέσεις CPA



Ασφάλεια σε επιθέσεις CPA

- Είσοδος: $g^{\alpha}, g^{\beta}, g^{c}$
- Στο CPA-GAME δημόσιο κλειδί $y = g^{\alpha}$
- Ο $\mathcal{B}$ απαντά στις κρυπτογραφήσεις του $\mathcal{A}$
- Όταν ο $\mathcal{A}$ προκαλέσει με δύο μηνύματα
  - ο $\mathcal{C}$ διαλέγει τυχαίο $bit \in \{0, 1\}$,
  - κρυπτογραφεί το M_b με τυχαιότητα το g^{β} και πολλαπλασιάζει με g^{c}
  - Τελικά στέλνει το: $(g^{\beta}, M_b \cdot g^{c})$
- Ο $\mathcal{A}$ επιστρέφει την τιμή του bit^*
- Ο $\mathcal{B}$ εξάγει το bit^*

Ασφάλεια σε επιθέσεις CPA

Ανάλυση

- Για τριάδα DH: $g^c = (g^\alpha)^\beta = y^\beta$
    - ο $\mathcal{A}$ θα λάβει ένα έγκυρο κρυπτοκείμενο ElGamal.
    - Η πιθανότητα να μαντέψει σωστά είναι τουλάχιστον: $1/2 +$ non-negl(λ).
- Για τυχαία τριάδα: ο $\mathcal{A}$ θα πρέπει να μαντέψει τυχαία
- Πιθανότητα επιτυχίας: $\frac{1}{2}$.
- Τελική πιθανότητα επιτυχίας για $\mathcal{B}$ τουλάχιστον non-negl(λ)
- Μπορεί να ξεχωρίσει μία DH τριάδα από μία τυχαία με μη αμελητέα πιθανότητα.

Ομομορφικές Ιδιότητες

Πολλαπλασιαστικός Ομομορφισμός

$$\begin{aligned}
\mathtt{Encrypt}_y(r_1, m_1) \cdot \mathtt{Encrypt}_y(r_2, m_2) &= \\
(g^{r_1}, m_1 y^{r_1}) \cdot (g^{r_2}, m_2 y^{r_2}) &= \\
(g^{r_1 + r_2}, (m_1 \cdot m_2) \cdot y^{r_1 + r_2}) &= \\
\mathtt{Encrypt}_y(r_1 + r_2, m_1 m_2)
\end{aligned}$$

Ομομορφικές Ιδιότητες

Reencryption

$$
\begin{aligned}
\mathtt{Encrypt}_y(r_1, m) \cdot \mathtt{Encrypt}_y(r_2, 1) = \\
(g^{r_1}, my^{r_1}) \cdot (g^{r_2}, y^{r_1}) = \\
(g^{r_1+r_2}, my^{r_1+r_2}) = \mathtt{Encrypt}_y(r_1 + r_2, m)
\end{aligned}
$$

Αλλαγή της τυχαιότητας - Αλλαγή της μορφής του μηνύματος
...χωρίς γνώση του ιδιωτικού κλειδιού
Malleability

Ομομορφικές Ιδιότητες

Προσθετικός Ομομορφισμός - Εκθετικό ElGamal
Κρυπτογράφηση του g^m αντί για m

$$\mathtt{Encrypt}_y(r, m) = (g^r, g^m y^r)$$

$$\begin{aligned} \mathtt{Encrypt}_y(r_1, m_1) \cdot \mathtt{Encrypt}_y(r_2, m_2) &= \\ (g^{r_1}, g^{m_1} y^{r_1}) \cdot (g^{r_2}, g^{m_2} y^{r_2}) &= \\ (g^{r_1+r_2}, g^{m_1+m_2} \cdot y^{r_1+r_2}) &= \\ \mathtt{Encrypt}_y(r_1 + r_2, (m_1 + m_2)) \end{aligned}$$

Αποκρυπτογράφηση: Λαμβάνουμε το g^m

Επίλυση διακριτού λογαρίθμου ('εύκολου').

Ασφάλεια σε επιθέσεις CCA

Το textbook ElGamal δεν διαθέτει CCA-security
Έστω ότι ο $\mathcal{A}$ μπορεί να αποκρυπτογραφήσει μηνύματα επιλογής του, εκτός του c.

- Στόχος: Αποκρυπτογράφηση του $c = (G, M) = (g^r, m_b y^r)$
- Κατασκευή $c' = (G', M') = (G \cdot g^{r'}, M \cdot a y^{r'}) = (g^{r+r'}, a \cdot m_b \cdot y^{r+r'})$, όπου a επιλέγεται από τον $\mathcal{A}$
- Η αποκρυπτογράφηση του M' ($\frac{M'}{G'^x}$) δίνει το am_b και κατά συνέπεια το m_b
- Αν $m_b = m_0$ επιστρέφει $b^* = 0$ αλλιώς επιστρέφει $b^* = 1$

DLP-based Commitment Schemes

DLP-based Commitment Schemes

Coin Flipping over the telephone

- Η Alice και ο Bob διαφωνούν (τηλεφωνικά) για το πού θα πάνε
- Αποφασίζουν να ρίξουν δύο νομίσματα (απομακρυσμένα)
- Ίδιο αποτέλεσμα: διαλέγει η Alice
- Διαφορετικό Αποτέλεσμα: διαλέγει ο Bob
- Προβλήματα;

DLP-based Commitment Schemes

Λύση: Commitment Schemes

- Ιδιότητες
    - **Hiding** - Προστατεύει αποστολέα - καθώς δεν μπορεί να διαρρεύσει το μήνυμά του
    - **Binding** - Προστατεύει παραλήπτη - καθώς ο αποστολέας δεν μπορεί να αλλάξει την τιμή του εκ των υστέρων
- Χρήση randomization για προστασία από brute-force επιθέσεις

Pedersen commitment

- Επιλογή ομάδας με δύσκολο DLP από TTP
  - Επιλογή πρώτου q ώστε $p = 2q + 1$ πρώτος
  - $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ υπομάδα τάξης q του $\mathbb{Z}_p^*$
  - Επιλογή τυχαίου h (ή $x \in \mathbb{Z}_q$ και $h = g^x$)
  - Δημοσιοποίηση $g, \mathbb{G}, p, q, h$
- Δέσμευση:
  $c = commit(m, r) = g^m \cdot h^r \bmod p$
- Αποκάλυψη:
  Αποστολή m, r
- Επαλήθευση:
  $c =_? g^m \cdot h^r$

Ιδιότητες - Information Theoretically Hiding

$c = g^m \cdot h^r = g^{m+xr} \pmod{p}$

Ακόμα και ένας παντοδύναμος αντίπαλος να μπορεί να λύσει το DLP θα έχει μία εξίσωση της μορφής

$d = m + xr \pmod{q}$

2 άγνωστοι (m, r) - 1 εξίσωση

Ιδιότητες - Computationally Binding

DLP-based collision resistance

Αν το DLP είναι δύσκολο τότε το σχήμα δέσμευσης είναι binding

Έστω $c = commit(m, r) = commit(m', r')$ με $m \neq m'$

$$\begin{aligned} g^m \cdot h^r = g^{m'} \cdot h^{r'} &\Rightarrow \\ g^{m+xr} = g^{m'+xr'} &\Rightarrow \\ m + xr = m' + xr' \pmod{q} &\Rightarrow \\ x = \frac{m' - m}{r - r'} & \end{aligned}$$

ΑΤΟΠΟ

Πηγές

Βιβλιογραφία i

- Παγουρτζής, Α., Ζάχος, Ε., ΓΠ, 2015. Υπολογιστική κρυπτογραφία. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
- Jonathan Katz and Yehuda Lindell. Introduction to Modern Cryptography (Chapman and Hall/Crc Cryptography and Network Security Series). Chapman and Hall/CRC, 2007
- Nigel Smart. Introduction to cryptography
- Paar, Christof, and Jan Pelzl. Understanding cryptography: a textbook for students and practitioners. Springer Science-Business Media, 2009.
- Kiayias, Aggelos Cryptography primitives and protocols, UoA, 2015
- Dan Boneh, Introduction to cryptography, online course
- Torben Pryds Pedersen. Non-interactive and information-theoretic secure verifiable secret sharing. In CRYPTO '91, pages 129–140, 1991
- Victor Shoup Why chosen ciphertext security matters, 1998
- Adi Shamir, How to share a secret. Communications of the ACM 22.11 (1979): 612-613.
- Helger Lipmaa, 79.159 Cryptography and Data Security, 24.03.2004 Lecture 9: Secret Sharing, Threshold Cryptography, MPC
- J. Kuhn The Mathematics of Secret Sharing