Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Άρης Παγουρτζής, Δώρα Σούλιου, Στάθης Ζάχος, Δημήτρης Σακαβάλας
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 27/10/2017

Άσκηση 1: Ασυμπτωτικός Συμβολισμός, Αναδρομικές Σχέσεις.

(α) Να ταξινομήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά τάξης μεγέθους, να βρείτε δηλαδή μια διάταξη $g_1, g_2, g_3, \ldots$ τέτοια ώστε $g_1 = \mathrm{O}(g_2)$, $g_2 = \mathrm{O}(g_3)$, κοκ. Σε αυτή τη διάταξη, να επισημάνετε τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους.

n^4	$2^{(\log_2 n)^3}$	$\log(10n!)/(\log n)^9$	$n3^{4^{5^6}}$
$\log(\binom{n}{\log n})$	$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$(\log(3n))^{\log(7n)}$	$\sqrt{n}!$
$\sum_{k=1}^{n} k2^{-k}$	$n^5/\log^{10} n$	$n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$	$\log\left(\binom{2n}{n}\right)$
$\binom{2n}{n/4}$	$\sum_{k=1}^{n} k2^k$		

(β) Να υπολογίσετε την τάξη μεγέθους $\Theta()$ των λύσεων των παρακάτω αναδρομικών σχέσεων. Για όλες τις σχέσεις, να θεωρήσετε ότι $T(1) = \Theta(1)$.

1. $T(n) = 3T(n/4) + n \log\log^7 n$
2. $T(n) = 4T(n/4) + n \log^5 n$
3. $T(n) = 9T(n/5) + n \log^1 4n$
4. $T(n) = T(n-1) + \log n$
5. $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \Theta(\log n)$

Άσκηση 2: Σωροί

(α) Σχεδιάστε $\mathrm{O}(n)$ αλγόριθμο για συνένωση δύο δυαδικών σωρών σε έναν ενιαίο σωρό, όπου n το άθροισμα του πλήθους των στοιχείων των δύο σωρών.

(β) Σχεδιάστε ακόμη καλύτερο αλγόριθμο για την περίπτωση όπου ο ένας σωρός είναι μεγέθους $\mathrm{o}(n)$ (π.χ. έχει $\mathrm{O}(\sqrt{n})$ στοιχεία). Ποια είναι η πολυπολοκότητα του αλγορίθμου σας; Πώς θα συμπεριφερθεί ο αλγόριθμος όταν και οι δύο σωροί έχουν $\Theta(n)$ στοιχεία;

Άσκηση 3: Ταξινόμηση

Έστω πίνακας θετικών ακεραίων $A[1 \dots n]$ και έστω M το μέγιστο στοιχείο του A.

(α) Να δείξετε ότι ο A μπορεί να ταξινομηθεί σε χρόνο $\mathrm{O}(n+M)$. Αν $M = \mathrm{O}(n)$, ο χρόνος ταξινόμησης είναι γραμμικός. Γιατί δεν ισχύει το κάτω φράγμα του $\Omega(n \log n)$ σε αυτή την περίπτωση;

(β) Έστω ότι $M = n^d - 1$, όπου d μια θετική ακέραια σταθερά. Να διατυπώσετε αλγόριθμο που ταξινομεί τον πίνακα A σε γραμμικό χρόνο. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα στοιχεία του A αναπαριστώνται στο n-αδικό σύστημα αρίθμησης και να επεκτείνετε τον αλγόριθμο του (α). Θα σας βοηθήσει ακόμη να θυμηθείτε πως λειτουργεί ο (μη συγκριτικός) αλγόριθμος ταξινόμησης Radixsort.

(γ) **Bonus ερώτημα:** Να δείξετε ένα κάτω φράγμα στο χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης κάθε συγκριτικού αλγόριθμου για τον πίνακα A που να λαμβάνει υπόψη και την τιμή του M. Τι πρέπει να ισχύει για το M ώστε να υπάρχει συγκριτικός αλγόριθμος ταξινόμησης με χρόνο εκτέλεσης $\mathrm{O}(n \log\log n)$; Για αυτές τις τιμές του M, να διατυπώσετε συγκριτικό αλγόριθμο ταξινόμησης με χρόνο εκτέλεσης $\mathrm{O}(n \log\log n)$.

Άσκηση 4: Αναζήτηση

(α) Έστω k, n θετικοί φυσικοί, με $k < n$, και έστω πίνακας $A[0 \dots n]$ με $n+1$ φυσικούς μικρότερους ή ίσους του n. Υποθέτουμε ότι οι τιμές κάθε δύο διαδοχικών στοιχείων του A διαφέρουν το πολύ κατά k, δηλαδή ότι για κάθε j, $|A[j]-A[j+1]| \leq k$. (i) Να δείξετε ότι υπάρχει θέση j τέτοια ώστε $|A[j]-j| \leq (k+1)/2$. (ii) Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια τέτοια θέση. Να προσδιορίσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας και να αιτιολογήσετε την ορθότητά του.

(β) Έστω n, m θετικοί φυσικοί, με $m \leq n$, και έστω διδιάστατος πίνακας $A[1 \dots n, 1 \dots m]$ με nm φυσικούς. Γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα A είναι ταξινομημένα σε γνήσια αύξουσα σειρά σε κάθε γραμμή του και σε κάθε στήλη του (δηλ. για κάθε i, j, ισχύει ότι $A[i,j] < A[i,j+1]$ και ότι $A[i,j] < A[i+1,j]$). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει όλες τις θέσεις του πίνακα A όπου εμφανίζεται μια δεδομένη τιμή k. Να προσδιορίσετε την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας (συναρτήσει των n και m) και να αιτιολογήσετε την ορθότητά του.

(γ) **Bonus ερώτημα:** Να αποδείξετε ένα ακριβές κάτω φράγμα στον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης κάθε συγκριτικού αλγόριθμου για το πρόβλημα (β). Είναι ο αλγόριθμος που διατυπώσατε βέλτιστος για όλα τα m, n, με $m \leq n$. Αν όχι, να διατυπώσετε έναν βέλτιστο αλγόριθμο.

Άσκηση 5: Απόλυτη Πλειοψηφία και Ισχυρή Πλειοψηφία

Είστε επίσημος προσκεκλημένος στο Κοινοβούλιο της χώρας των Αλγορίθμων. Υπάρχουν $k \geq 2$ πολιτικά κόμματα που εκπροσωπούνται στο Κοινοβούλιο και n βουλευτές που καθένας τους ανήκει σε ένα πολιτικό κόμμα. Δεν υπάρχει κανένας τρόπος να βρείτε ποιος βουλευτής ανήκει σε ποιο πολιτικό κόμμα (και θα θεωρούνταν μεγάλη προσβολή αν αρχίσετε να ρωτάτε σχετικά). Μπορείτε μόνο να καταλάβετε αν δύο βουλευτές ανήκουν στο ίδιο κόμμα ή όχι από τον χαιρετισμό τους. Αν δύο βουλευτές ανήκουν στο ίδιο κόμμα, ο χαιρετισμός τους είναι εγκάρδιος και συνοδεύεται από χαμόγελα και φιλοφρονήσεις. Διαφορετικά, ο χαιρετισμός τους είναι ψυχρός και δεν ανταλλάσσουν κουβέντα. Μπορείτε ακόμη να ζητήσετε από τον Πρόεδρο του Κοινοβουλίου να κανονίσει ώστε ο χαιρετισμός μεταξύ συγκεκριμένων ζευγαριών βουλευτών να λάβει χώρα μπροστά σας (και με τη σειρά που εσείς επιλέγετε). Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό (ως προς το πλήθος των χαιρετισμών που χρειάζεται να παρακολουθήσετε) αλγόριθμο που διαπιστώνει αν κάποιο πολιτικό κόμμα έχει απόλυτη πλειοψηφία στο Κοινοβούλιο. Αν υπάρχει τέτοιο κόμμα, θα πρέπει ο αλγόριθμός σας να μπορεί να βρει όλους τους βουλευτές που ανήκουν σε αυτό.