



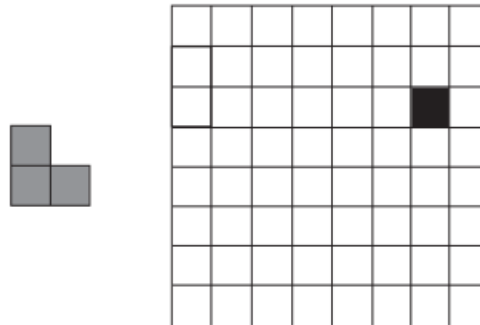
Άσκηση 1: Κλειδιά και κλειδαριές

Τα Παλιά Κτίρια Ηλεκτρολόγων έχουν n παρόμοιες πόρτες με διαφορετικό κλειδί η κάθε μία. Ο παλιός επιστάτης των κτιρίων είχε τα κλειδιά μπερδεμένα μέσα σε ένα συρτάρι και τώρα ο νέος επιστάτης (που δεν ξέρει αλγορίθμους) θέλει να τα αντιστοιχίσει στις πόρτες για να τα βρίσκει γρήγορα. Στο συρτάρι υπάρχουν n κλειδιά διαφορετικού μεγέθους που αντιστοιχούν 1-1 στις n κλειδαριές αντίστοιχου μεγέθους. Τα κλειδιά διαφέρουν κατά πολύ λίγο σε μέγεθος οπότε δε μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους, αλλά μπορούμε να δοκιμάσουμε ένα κλειδί σε μια κλειδαριά και να καταλάβουμε αν ταιριάζει ή αν είναι μεγαλύτερο ή αν είναι μικρότερο.

Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο για να λύσετε το πρόβλημα ο οποίος θα έχει πολυπλοκότητα μέσης περίπτωσης $\Theta(n \log n)$. Υποθέστε ότι η διαρρύθμιση των κτιρίων είναι πολύ καλή οπότε ο χρόνος που κάνει ο επιστάτης για να πάει από τη μια πόρτα στην άλλη και να δοκιμάσει το κλειδί είναι αμελητέος.

Άσκηση 2: Puzzle

Ο μικρός σας αδερφός (που δεν ξέρει αλγορίθμους) σας ζήτησε να τον βοηθήσετε με ένα νέο παζλ που τους έδωσε ο δάσκαλος στο σχολείο. Σε αυτό το παζλ έχετε ένα $2^n \times 2^n$ λευκό grid με ακριβώς 1 μαύρο τετράγωνο που μπορεί να είναι κάθε φορά σε διαφορετική θέση. Θέλετε να καλύψετε όλο το grid με κομμάτια σχήματος "Γ" που αποτελούνται από τρία 1×1 τετραγωνάκια όπως φαίνεται στην Εικόνα 1. Σχεδιάστε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για να λύσετε γρήγορα το puzzle.



Εικόνα 1: Παράδειγμα του puzzle

υπόδειξη: $2^n \cdot 2^n = 4 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1}$

Άσκηση 3: Διαστημικές μάχες

Σε ένα γαλαξία πολύ πολύ μακριά, η Αυτοκρατορία με σκοπό να καταστρέψει τους πλανήτες που ελέγχονται από τους επαναστάτες έχει κατασκευάσει n μικρά Death Satellites που όμως λόγω κακού σχεδιασμού μπορούν να επιτεθούν σε ακριβώς έναν πλανήτη το κάθε ένα. Το κάθε Satellite έχει δύναμη f_i . Οι Επαναστάτες έχουν εγκαταστήσει

σε κάθε έναν από τους n πλανήτες τους μία ασπίδα που μπορεί να αντέξει δύναμη μέχρι s_j και ο κάθε πλανήτης της Επανάστασης έχει αξία v_j για την Αυτοκρατορία. Αν ο πλανήτης j (με ασπίδα s_j) δεχθεί επίθεση με δύναμη f_i και $f_i > s_j$ η Αυτοκρατορία θα κερδίσει v_j αλλιώς δε θα κερδίσει τίποτα. Σκοπός της Αυτοκρατορίας είναι να ταιριάξει τα n Sattelites της με τους n πλανήτες ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να υπολογίζει ένα βέλτιστο ταίριασμα Sattelites με πλανήτες για την Αυτοκρατορία. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 4: Κεραίες

- i Η εταιρεία κινητής τηλεφωνίας TeleFon (της οποίας ο ιδιοκτήτης δεν είχε φαντασία για το όνομα) θέλει να εγκαταστήσει κεραίες ασύρματου internet για να καλύπτει με σήμα τους κατοίκους που μένουν κατά μήκος ενός επαρχιακού δρόμου. Οι κάτοικοι θέλουν να έχουν σήμα μόνο όταν είναι σπίτι τους και όλα τα σπίτια βρίσκονται μόνο σε αυτόν τον δρόμο ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα. Οι κεραίες της εταιρείας έχουν εμβέλεια k μέτρων και η κάθε μια μπορεί να καλύψει όσα σπίτια είναι μέσα στην εμβέλεια της. Η εταιρεία θέλει, γνωρίζοντας τις ακριβείς θέσεις των σπιτιών πάνω στην ευθεία, να εγκαταστήσει τις λιγότερες δυνατές κεραίες ώστε να καλύπτονται όλοι οι πελάτες. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να βρίσκει τις βέλτιστες θέσεις για τις κεραίες. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.
- ii Σε ένα άλλο επαρχιακό χωριό τα σπίτια που χρειάζονται κάλυψη βρίσκονται γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας πολύ μεγαλύτερης από αυτήν των κεραιών της εταιρείας. Προφανώς η εταιρεία δε μπορεί να τοποθετήσει κεραίες μέσα στη λίμνη. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που να βρίσκει τις βέλτιστες θέσεις για τις κεραίες. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.
Παρατήρηση: αφού η ακτίνα της λίμνης είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή των κεραιών, μπορείτε να υποθέσετε ότι πάνω στον κύκλο το κομμάτι που θα καλύπτεται από μία κεραία θα είναι ένα κυκλικό τόξο μήκους $2k'$ μέτρων με κέντρο την κεραία.

Άσκηση 5: Εργοστάσιο ποτηριών

Σε ένα εργοστάσιο υαλικών θέλουν να μετρήσουν την αντοχή των κρυστάλλινων ποτηριών που κατασκευάζουν. Συγκεκριμένα, θέλουν να βρουν ποιο ακριβώς (με ακρίβεια εκατοστού) είναι το μέγιστο ύψος από το οποίο μπορούν να πέσουν τα ποτήρια τους χωρίς να σπάσουν. Η διεύθυνση του εργοστασίου μπορεί να διαθέσει έως ένα πλήθος ποτηριών k για τις δοκιμές (δηλ. δέχεται να καταστραφούν k ποτήρια) και θέλει το μέγιστο πλήθος δοκιμών που θα χρειαστούν να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι τα ποτήρια σίγουρα σπάνε από ένα δεδομένο ύψος n εκατοστών και πάνω και ότι όλα τα ποτήρια είναι της ίδιας ακριβώς αντοχής.

- i Βρείτε την βέλτιστη σειρά δοκιμών για $n = 100$ και $k = 1$, καθώς και για $n = 100$ και $k = 2$. Ποιό είναι το μέγιστο πλήθος δοκιμών που μπορεί να χρειαστεί η λύση σας;
- ii Σχεδιάστε αλγόριθμο που να βρίσκει την βέλτιστη σειρά δοκιμών, με είσοδο τα n και k έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το πλήθος των δοκιμών στη χειρότερη περίπτωση. Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;
Υπόδειξη: προσπαθήστε πρώτα να εκφράσετε αναδρομικά τη βέλτιστη λύση της περίπτωσης τυχαίου n και $k = 2$, χρησιμοποιώντας λύσεις των περιπτώσεων $k = 1$ και $k = 2$ για μικρότερες τιμές του n .
- iii Μπορείτε να σκεφτείτε κάποια άλλη αναδρομική σχέση που να επιλύει το πρόβλημα; Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου που προκύπτει;