



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Άρης Παγουρτζής, Δώρα Σούλιου, Νίκος Λεονάρδος, Στάθης Ζάχος

4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 12/2/2018

Προσοχή: η σειρά αυτή θα μετρήσει μόνο θετικά, δηλαδή θα προσμετρηθεί μόνο αν βελτιώνει τον μέσο όρο των προηγούμενων σειρών.

Άσκηση 1: Αναπροσαρμογή Συντομότερων Μονοπατιών

Θεωρούμε ένα (ισχυρά συνεκτικό) κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές, και (ενδεχομένως αρνητικά) μήκη w στις ακμές. Συμβολίζουμε με $d(u, v)$ την απόσταση των κορυφών u και v στο γράφημα G .

1. Δίνονται n αριθμοί $\delta_1, \dots, \delta_n$, όπου κάθε δ_i (υποτίθεται ότι) ισούται με την απόσταση v_1-v_i στο G . Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν τα $\delta_1, \dots, \delta_n$ πράγματι ανταποκρίνονται στις αποστάσεις των κορυφών από την v_1 , δηλαδή αν για κάθε $v_k \in V$, ισχύει ότι $\delta_k = d(v_1, v_k)$. Αν αυτό αληθεύει, ο αλγόριθμος σας πρέπει να υπολογίζει και να επιστρέφει ένα δέντρο συντομότερων μονοπατιών με ρίζα τη v_1 .
2. Υποθέτουμε ότι έχουμε υπολογίσει τις αποστάσεις $d(v_i, v_j)$ μεταξύ κάθε διατεταγμένου ζεύγους κορυφών $(v_i, v_j) \in V \times V$. Στη συνέχεια, το μήκος μιας ακμής $e = (x, y)$ μειώνεται σε $w'(x, y) < w(x, y)$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O(n^2)$ που να αναπροσαρμόζει τις αποστάσεις μεταξύ όλων των κορυφών, δεδομένου ότι η μείωση του βάρους της ακμής δεν δημιουργεί κύκλο αρνητικού μήκους.
3. Τι αλλάζει στο προηγούμενο ερώτημα, αν το μήκος μιας ακμής $e = (x, y)$ αυξηθεί σε $w'(x, y) > w(x, y)$; Μπορείτε να επεκτείνετε τον αλγόριθμο του προηγούμενου ερωτήματος σε αυτή τη περίπτωση; Αν ναι, να περιγράψετε την επέκταση του αλγορίθμου, αλλιώς να εξηγήσετε συνοπτικά τις βασικές διαφορές/δυσκολίες.

Άσκηση 2: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι NP-Πλήρη:

1. Συνδετικό Δέντρο με Ελάχιστο Αριθμό Φύλλων (Min Leaf Spanning Tree)

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός k , $2 \leq k < |V|$. Ερώτηση: Έχει το G συνδετικό δέντρο με k ή λιγότερα φύλλα (δηλ. κορυφές βαθμού 1);

2. Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση

Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \dots, w_n\}$ με n φυσικούς και φυσικοί B και x με $B > x \geq 1$. Ερώτηση: Υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε $B - x \leq w(S) \leq B$;

Άσκηση 3: Αναγωγές και μη-προσεγγισιμότητα

Αποδείξτε ότι αν για οποιαδήποτε σταθερά $\varepsilon > 0$ υπάρχει $(2 - \varepsilon)$ -προσεγγιστικός αλγόριθμος πολυωνομικού χρόνου για το Travelling Salesman Problem (TSP) - δηλαδή αλγόριθμος που να επιστρέφει (σε πολυωνομικό χρόνο) περιοδεία με κόστος το πολύ $(2 - \varepsilon) \cdot OPT$, όπου OPT το κόστος της ελάχιστης περιοδείας - τότε $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Μπορείτε να γενικεύσετε αντικαθιστώντας το $(2 - \varepsilon)$ με οποιαδήποτε σταθερά $k \geq 2$; Μπορείτε να γενικεύσετε ακόμη περισσότερο;

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε κατάλληλα την αναγωγή από το Hamilton Cycle στο TSP.