Μαθημα Τριτο

Άρης Παγουρτζης, Βασιλης Νακος ΑΛΜΑ

Προηγούμενο Μάθημα

1. Σχέση Ορθογώνιων Διανυσμάτων και Ισχυρής Υπόθεσης Υποεκθετικού Χρόνου.
2. Προβλήματα σε συμβολοσειρές: μέγιστη κοινή υπακολουθία, πρόβλημα απόστασης μεταβολής (edit distance).
3. Δυσκολία μέγιστης κοινής υπακολουθίας μέσω Ορθογώνιων Διανυσμάτων.

Προηγούμενο Μάθημα

1. Σχέση Ορθογώνιων Διανυσμάτων και Ισχυρής Υπόθεσης Υποεκθετικού Χρόνου.
2. Προβλήματα σε συμβολοσειρές: μέγιστη κοινή υπακολουθία, πρόβλημα απόστασης μεταβολής (edit distance).
3. Δυσκολία μέγιστης κοινής υπακολουθίας μέσω Ορθογώνιων Διανυσμάτων.

Σε αυτό το μάθημα: Πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών.

Πρόβλημα Συντομότερων Μονοπατιών (APSP)

Δίνεται ένας γράφος με n κορυφές, και βάρη στις ακμές. Όλα τα βάρη είναι στο $\{1, \ldots, n^c\}$, για κάποια σταθερά c. Να βρεθεί *για κάθε* ζεύγος u, v το μήκος του συντομότερου μονοπατιού από το u στο v.

Γνωστοί Αλγόριθμοι

- Αλγόριθμος Floyd-Warshall : $O(n^3)$.

$$dp[i,j,0] = w(i,j)$$
$$dp[i,j,k] = \min\{dp[i,j,k-1], dp[i,k,k-1] + dp[k,j,k-1]$$

Γνωστοί Αλγόριθμοι

- Αλγόριθμος Floyd-Warshall : $O(n^3)$.

$$dp[i,j,0] = w(i,j)$$
$$dp[i,j,k] = \min\{dp[i,j,k-1], dp[i,k,k-1] + dp[k,j,k-1]$$

- Αλγόριθμος Ryan Williams: $O\left(\frac{n^3}{2^{\Theta(\sqrt{\log n})}}\right)$.

Γνωστοί Αλγόριθμοι

- Αλγόριθμος Floyd-Warshall : $O(n^3)$.

$$dp[i,j,0] = w(i,j)$$
$$dp[i,j,k] = \min\{dp[i,j,k-1], dp[i,k,k-1] + dp[k,j,k-1]$$

- Αλγόριθμος Ryan Williams: $O\left(\frac{n^3}{2^{\Theta(\sqrt{\log n})}}\right)$.

Εικασία: Δεν υπάρχει αλγόριθμος $n^{3-\epsilon}$ για το πρόβλημα των Συντομότερων Μονοπατιών ($\forall \epsilon > 0, \exists c > 0$ ώστε $\ldots$).

(Μιν,+) γινόμενο πινάκων

Δίνετα ένας $n_1 \times n_2$ πίνακας A, και ένας $n_1 \times n_2\}$ πίνακας B με εγγραφές στο $\{1, \ldots, n^c$. Το (Μιν,+) γινόμενο των A, B είναι ένας $n_2 \times n_3$ πίνακας C έτσι ώστε

$$C[i,j] = \min_{1 \leq k \leq n_2} \{A[i,k] + B[k,j]\}\,.$$

(Μιν,+) γινόμενο πινάκων

Δίνετα ένας $n_1 \times n_2$ πίνακας A, και ένας $n_1 \times n_2\}$ πίνακας B με εγγραφές στο $\{1, \ldots, n^c$. Το (Μιν,+) γινόμενο των A, B είναι ένας $n_2 \times n_3$ πίνακας C έτσι ώστε

$$C[i,j] = \min_{1 \leq k \leq n_2} \{A[i,k] + B[k,j]\} .$$

Άμεσος Αλγόριθμος: $O(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3) = O(n^3)$ $(n_1 = n_2 = n_3 = n)$.

(Μιν,+) γινόμενο πινάκων

Δίνετα ένας $n_1 \times n_2$ πίνακας A, και ένας $n_1 \times n_2\}$ πίνακας B με εγγραφές στο $\{1, \ldots, n^c$. Το (Μιν,+) γινόμενο των A, B είναι ένας $n_2 \times n_3$ πίνακας C έτσι ώστε

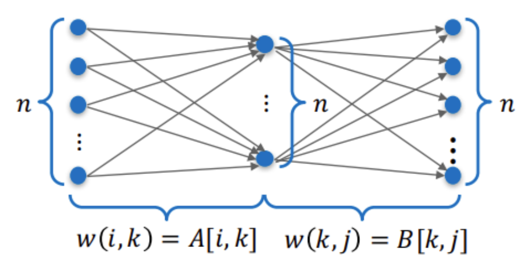
$$C[i, j] = \min_{1 \leq k \leq n_2} \{A[i, k] + B[k, j]\} .$$

Άμεσος Αλγόριθμος: $O(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3) = O(n^3)$ $(n_1 = n_2 = n_3 = n)$.

Εικασία: Ο υπολογισμός του (Μιν,+) γινομένου δε γίνεται σε χρόνο $n^{3-\epsilon}$ $(\forall \epsilon > 0, \exists c > 0$ ώστε $\ldots)$.

Σχέση ανάμεσα σε APSP και (Μιν,+) γινόμενο: Κατεύθυνση I

Θεώρημα. Αν το APSP επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου $T(n)$, τότε το (Μιν,+) γινόμενο επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου $O(T(n))$.



Σχέση ανάμεσα σε APSP και (Μιν,+) γινόμενο: Κατεύθυνση ΙΙ

Θεώρημα. Αν το (Μιν,+) γινόμενο επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου, τότε το APSP επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου $T(n)$, τότε το $O(T(n) \cdot \log n)$.

Σχέση ανάμεσα σε APSP και (Μιν,+) γινόμενο: Κατεύθυνση II

Θεώρημα. Αν το (Μιν,+) γινόμενο επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου, τότε το APSP επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου $T(n)$, τότε το $O(T(n) \cdot \log n)$.

Έστω A ο πίνακας γειτνίασης/βαρών του G. Με τι μοιάζει το (Μιν,+) γινόμενο C του A με τον εαυτό του;

Σχέση ανάμεσα σε APSP και (Μιν,+) γινόμενο: Κατεύθυνση ΙΙ

Θεώρημα. Αν το (Μιν,+) γινόμενο επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου, τότε το APSP επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου $T(n)$, τότε το $O(T(n) \cdot \log n)$.

Έστω A ο πίνακας γειτνίασης/βαρών του G. Με τι μοιάζει το (Μιν,+) γινόμενο C του A με τον εαυτό του;

$$C[i,j] = \min_{1 \leq k \leq n} \{w(i,k) + w(k,j)\}$$

Σχέση ανάμεσα σε APSP και (Μιν,+) γινόμενο: Κατεύθυνση II

Θεώρημα. Αν το (Μιν,+) γινόμενο επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου, τότε το APSP επιδέχεται έναν αλγόριθμο χρόνου $T(n)$, τότε το $O(T(n) \cdot \log n)$.

Έστω A ο πίνακας γειτνίασης/βαρών του G. Με τι μοιάζει το (Μιν,+) γινόμενο C του A με τον εαυτό του;

$$C[i,j] = \min_{1 \leq k \leq n} \{w(i,k) + w(k,j)\}$$

$\star C[i,j]$ είναι το μήκους του συντομότερου μονοπατιού μήκους 2 από τον κόμβο i στον κόμβο j (αν δεν υπάρχει ακμή (i,k) θέτουμε $w(i,k) = \infty$).

Σχέση ανάμεσα σε APSP και (Μιν,+) γινόμενο: Κατεύθυνση II

Ορίζουμε $w[i,i] = 0$, έτσι ώστε $C[i,j]$ να εκφράζει το μήκος του συντομότερου μονοπατιού μήκους *το πολύ* 2 από τον κόμβο i στον κόμβο j.

$$C[i,j] = \min_{1\le k\le n} \{w(i,k) + w(k,j)\}$$

Σχέση ανάμεσα σε APSP και (Μιν,+) γινόμενο: Κατεύθυνση ΙΙ

Ορίζουμε $w[i,i] = 0$, έτσι ώστε $C[i,j]$ να εκφράζει το μήκος του συντομότερου μονοπατιού μήκους *το πολύ* 2 από τον κόμβο i στον κόμβο j.

$$C[i,j] = \min_{1 \leq k \leq n} \{w(i,k) + w(k,j)\}$$

Έστω $A \oplus B$ το (Μιν,+) γινόμενο δύο πινάκων. Τότε κοιτάμε το γινόμενο με n όρους

$$A \oplus A \oplus A \oplus \ldots \oplus A,$$

όπου A ο πίνακας βαρών/ γειτνίασης του G, δηλαδή $A[i,j] = w(i,j)$.

Σχέση ανάμεσα σε APSP και (Μιν,+) γινόμενο: Κατεύθυνση ΙΙ

Ορίζουμε $w[i,i] = 0$, έτσι ώστε $C[i,j]$ να εκφράζει το μήκος του συντομότερου μονοπατιού μήκους *το πολύ* 2 από τον κόμβο i στον κόμβο j.

$$C[i,j] = \min_{1 \le k \le n} \{w(i,k) + w(k,j)\}$$

Έστω $A \oplus B$ το (Μιν,+) γινόμενο δύο πινάκων. Τότε κοιτάμε το γινόμενο με n όρους

$$A \oplus A \oplus A \oplus \ldots \oplus A,$$

όπου A ο πίνακας βαρών/ γειτνίασης του G, δηλαδή $A[i,j] = w(i,j)$.
$W^{\oplus n} \to$ Γρήγορη ύψωση σε δύναμη.

(Μιν,+) γινόμενο για πίνακες με εγγραφές $\leq W$

Αρκεί να κατασκευάσουμε αλγόριθμο για το (Μιν,+) γινόμενο.

- Θα κωδικοποιήσουμε το (Μιν,+) χρησιμοποιώντας γινόμενο πολυωνύμων.

(Μιν,+) γινόμενο για πίνακες με εγγραφές $\leq W$

Αρκεί να κατασκευάσουμε αλγόριθμο για το (Μιν,+) γινόμενο.

- Θα κωδικοποιήσουμε το (Μιν,+) χρησιμοποιώντας γινόμενο πολυωνύμων.
- Δύο πολυώνυμα βαθμού d μπορούν να πολλαπλασιαστούν σε χρόνο $O(d \log d)$ χρησιμοποιώντας Γρήγορο Μετασχηματιμό Φουριέ (FFT).

(Μιν,+) γινόμενο για πίνακες με εγγραφές $\leq W$

Αρκεί να κατασκευάσουμε αλγόριθμο για το (Μιν,+) γινόμενο.

- Θα κωδικοποιήσουμε το (Μιν,+) χρησιμοποιώντας γινόμενο πολυωνύμων.
- Δύο πολυώνυμα βαθμού d μπορούν να πολλαπλασιαστούν σε χρόνο $O(d \log d)$ χρησιμοποιώντας Γρήγορο Μετασχηματιμό Φουριέ (FFT).
- Φτιάχνουμε πίνακα $\widetilde{A}$ ώστε $\widetilde{A}[i,j] = x^{A[i,j]}$. Όμοια για $\widetilde{B}$.
- Έχουμε

$$(\widetilde{A}\widetilde{B})[i,j] = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{A}[i,k] \cdot \widetilde{B}[k,j] = \sum_{k=1}^{n} x^{A[i,k]+B[k,j]}$$

$$(\widetilde{A}\widetilde{B})[i,j] = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{A}[i,k] \cdot \widetilde{B}[k,j] = \sum_{k=1}^{n} x^{A[i,k]+B[k,j]}$$

Γνωρίζοντας το πολυώνυμο $\sum_{k=1}^{n} x^{A[i,k]+B[k,j]}$, μπορώ να βρώ το $C[i,j] = \min_{1 \leq k \leq n} \{A[i,k] + B[k,j]\}$ από τον *μικρότερο* εκθέτη που εμφανίζεται σε μονώνυμο του πολυωνύμου.

$$(\widetilde{A}\widetilde{B})[i,j] = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{A}[i,k] \cdot \widetilde{B}[k,j] = \sum_{k=1}^{n} x^{A[i,k]+B[k,j]}$$

Γνωρίζοντας το πολυώνυμο $\sum_{k=1}^{n} x^{A[i,k]+B[k,j]}$, μπορώ να βρώ το $C[i,j] = \min_{1 \le k \le n} \{A[i,k] + B[k,j]\}$ από τον *μικρότερο* εκθέτη που εμφανίζεται σε μονώνυμο του πολυωνύμου.

Τρέχω οποιονδήποτε αλγόριθμο γρήγορου πολλαπλασιασμού πινάκων, αντικαθιστώντας του πολλαπλασιασμούς αριθμών με τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.

Άρα $O(W \log W \cdot n^{\omega})$ χρόνος για τον υπολογισμό του (Μιν,+) γινομένου.

Τρίγωνα και APSP

- (Πρόβλημα αρνητικού τριγώνου): Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G. Να βρεθεί αν υπάρχουν κορυφές i, j, k ώστε

$$w(i,j) + w(j,k) + w(k,i) < 0.$$

Τρίγωνα και APSP

- (Πρόβλημα αρνητικού τριγώνου): Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G. Να βρεθεί αν υπάρχουν κορυφές i, j, k ώστε

$$w(i,j) + w(j,k) + w(k,i) < 0.$$

- (Πρόβλημα Αναφοράς Αρνητικών Τριγώνων) Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G με σύνολο κορυφών $V := I \cup J \cup K$. Να βρεθεί για κάθε $i \in I, j \in J$, αν υπάρχει $k \in K$ ώστε

$$w(j,i) + w(i,k) + w(k,j) < 0.$$

Αναγωγή Αρνητικού Τριγώνου στο (Μιν,+) Γινόμενο

Έστω $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ έτσι ώστε $A[i,j] = w(i,j)$ αν ακμή (i,j) υπάρχει, αλλιώς ∞.

Αναγωγή Αρνητικού Τριγώνου στο (Μιν,+) Γινόμενο

Έστω $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ έτσι ώστε $A[i,j] = w(i,j)$ αν ακμή (i,j) υπάρχει, αλλιώς ∞.

1. Υπολόγισε $B := A \oplus A$, δηλαδή $B[i,j] = \min_{k=1}^{n} \{A[i,k] + A[k,j]\}$.

Αναγωγή Αρνητικού Τριγώνου στο (Μιν,+) Γινόμενο

Έστω $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ έτσι ώστε $A[i,j] = w(i,j)$ αν ακμή (i,j) υπάρχει, αλλιώς ∞.

1. Υπολόγισε $B := A \oplus A$, δηλαδή $B[i,j] = \min_{k=1}^{n} \{A[i,k] + A[k,j]\}$.
2. Υπολόγισε

$$\min_{i,j} \left\{A_{j,i} + B_{i,j}\right\} = \min_{i,j,k} \left\{A_{j,i} + A_{i,k} + A_{k,j}\right\} .$$

Αναγωγή Αρνητικού Τριγώνου στο (Μιν,+) Γινόμενο

Έστω $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ έτσι ώστε $A[i,j] = w(i,j)$ αν ακμή (i,j) υπάρχει, αλλιώς ∞.

1. Υπολόγισε $B := A \oplus A$, δηλαδή $B[i,j] = \min_{k=1}^{n} \{A[i,k] + A[k,j]\}$.
2. Υπολόγισε

$$\min_{i,j}\left\{A_{j,i} + B_{i,j}\right\} = \min_{i,j,k}\left\{A_{j,i} + A_{i,k} + A_{k,j}\right\}.$$

Αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από το ελάχιστο βάρος κάποιου τριγώνου!

(Μιν,+) γινόμενο σε Πρόβλημα Αναφοράς Αρνητικών τριγώνων

Υπενθύμιση: (Πρόβλημα Αναφοράς Αρνητικών Τριγώνων) Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G με σύνολο κορυφών $V := I \cup J \cup K$. Να βρεθεί για κάθε $i \in I, j \in J$, αν υπάρχει $k \in K$ ώστε

$$w(j,i) + w(i,k) + w(k,j) < 0.$$

(Μιν,+) γινόμενο σε Πρόβλημα Αναφοράς Αρνητικών τριγώνων

Υπενθύμιση: (Πρόβλημα Αναφοράς Αρνητικών Τριγώνων) Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G με σύνολο κορυφών $V := I \cup J \cup K$. Να βρεθεί για κάθε $i \in I, j \in J$, αν υπάρχει $k \in K$ ώστε

$$w(j,i) + w(i,k) + w(k,j) < 0.$$

- Έστω $|I| = |J| = |K| = n$.Ακμές από το I στο K, από το K στο J, κι από το J στο I.
- Στην ακμή $(i,k) \in I \times K$ βάλε βάρος $w(i,k) = A[i,k]$.
- Στην ακμή $(k,j) \in K \times J$ βάλε βάρος $w(k,j) = B[k,j]$.

- Έστω $|I| = |J| = |K| = n$.Ακμές από το I στο K, από το K στο J, κι από το J στο I.
- Στην ακμή $(i, k) \in I \times K$ βάλε βάρος $w(i, k) = A[i, k]$.
- Στην ακμή $(k, j) \in K \times J$ βάλε βάρος $w(k, j) = B[k, j]$.
- Τι να βάλουμε στις ακμές $(j, i) \in J \times I$ άραγε;

- Έστω $|I| = |J| = |K| = n$.Ακμές από το I στο K, από το K στο J, κι από το J στο I.
- Στην ακμή $(i,k) \in I \times K$ βάλε βάρος $w(i,k) = A[i,k]$.
- Στην ακμή $(k,j) \in K \times J$ βάλε βάρος $w(k,j) = B[k,j]$.
- Τι να βάλουμε στις ακμές $(j,i) \in J \times I$ άραγε;

Έλεγχος $w(j,i) + w(i,k) + w(k,j) < 0$ ισοδυναμεί με

$$\begin{aligned} w(i,k) + w(k,j) &< -w(j,i) \\ A[i,k] + B[k,j] &< -w(j,i) \end{aligned}$$

Εμείς θέλουμε το $\min_{k=1}^{n} \{A[i,k] + B[k,j]\}$, οπότε **ταυτόχρονη δυαδική αναζήτηση** στο $\{-2n^c, \ldots, 2n^c\}^{n^2}$.

- Έστω $|I| = |J| = |K| = n$.Ακμές από το I στο K, από το K στο J, κι από το J στο I.
- Στην ακμή $(i, k) \in I \times K$ βάλε βάρος $w(i, k) = A[i, k]$.
- Στην ακμή $(k, j) \in K \times J$ βάλε βάρος $w(k, j) = B[k, j]$.
- Τι να βάλουμε στις ακμές $(j, i) \in J \times I$ άραγε;

Έλεγχος $w(j, i) + w(i, k) + w(k, j) < 0$ ισοδυναμεί με

$$
\begin{aligned}
w(i, k) + w(k, j) &< -w(j, i) \\
A[i, k] + B[k, j] &< -w(j, i)
\end{aligned}
$$

Εμείς θέλουμε το $\min_{k=1}^{n} \{A[i, k] + B[k, j]\}$, οπότε **ταυτόχρονη δυαδική αναζήτηση** στο $\{-2n^c, \ldots, 2n^c\}^{n^2}$. $O(\log n)$ κλήσεις.

Αναγωγή Αναφοράς Αρνητικών Τριγώνων σε πρόβλημα αρνητικού τριγώνου

- (Πρόβλημα αρνητικού τριγώνου): Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G. Να βρεθεί αν υπάρχουν κορυφές i, j, k ώστε

$$w(i,j) + w(j,k) + w(k,i) < 0.$$

Αναγωγή Αναφοράς Αρνητικών Τριγώνων σε πρόβλημα αρνητικού τριγώνου

- (Πρόβλημα αρνητικού τριγώνου): Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G. Να βρεθεί αν υπάρχουν κορυφές i, j, k ώστε

$$w(i, j) + w(j, k) + w(k, i) < 0.$$

- (Πρόβλημα αναφοράς αρνητικών τριγώνων) Δίνεται κατευθυνόμενος γράφος G με σύνολο κορυφών $V := I \cup J \cup K$. Να βρεθεί για κάθε $i \in I, j \in J$, αν υπάρχει $k \in K$ ώστε

$$w(j, i) + w(i, k) + w(k, j) < 0.$$

Σπάμε τα I, J, K σε n/s μέρη μεγέθους s:

$$I_1, I_2, \ldots, I_{n/s}, J_1, J_2, \ldots, J_{n/s}, K_1, K_2, \ldots, K_{n/s}.$$

Σπάμε τα I, J, K σε n/s μέρη μεγέθους s:

$$I_1, I_2, \ldots, I_{n/s}, J_1, J_2, \ldots, J_{n/s}, K_1, K_2, \ldots, K_{n/s}.$$

Για καθεμία από τις $(n/s)^3$ επιλογές $\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}$ κοιτάμε το επαγόμενο γράφημα $G[\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}]$.

Σπάμε τα I, J, K σε n/s μέρη μεγέθους s:

$$I_1, I_2, \dots, I_{n/s}, J_1, J_2, \dots, J_{n/s}, K_1, K_2, \dots, K_{n/s}.$$

Για καθεμία από τις $(n/s)^3$ επιλογές $\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}$ κοιτάμε το επαγόμενο γράφημα $G[\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}]$.

Αλγόριθμος.
Για όλα τα $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$:
Όσο το $G[\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}]$ περιέχει αρνητικό τρίγωνο: Βρες ένα αρνητικό τρίγωνο (i, j, k) και θέσε $w(i, j) = \infty$.

Σπάμε τα I, J, K σε n/s μέρη μεγέθους s:

$$I_1, I_2, \ldots, I_{n/s}, J_1, J_2, \ldots, J_{n/s}, K_1, K_2, \ldots, K_{n/s}.$$

Για καθεμία από τις $(n/s)^3$ επιλογές $\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}$ κοιτάμε το επαγόμενο γράφημα $G[\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}]$.

Αλγόριθμος.
Για όλα τα $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$:
Όσο το $G[\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}]$ περιέχει αρνητικό τρίγωνο: Βρες ένα αρνητικό τρίγωνο (i, j, k) και θέσε $w(i, j) = \infty$.

$\star$ Το πολύ n^2 βάρη θα τεθούν σε ∞.
$\star$ Αν τα (i, j) συμμετέχουν σε αρνητικό τρίγωνο, αυτό θα εντοπιστεί.

Πριν προχωρήσουμε, προσοχή!
Ερώτηση: Πως εντοπίζουμε ένα αρνητικό τρίγωνο, αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα·

Πριν προχωρήσουμε, προσοχή!
Ερώτηση: Πως εντοπίζουμε ένα αρνητικό τρίγωνο, αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα·

Διαμερίζουμε το $\widetilde{I}$ σε δύο ίσα μέρη $\widetilde{I}^{(1)}, \widetilde{I}^{(2)}$. Όμοια για $\widetilde{J}, \widetilde{K}$.

Πριν προχωρήσουμε, προσοχή!
Ερώτηση: Πως εντοπίζουμε ένα αρνητικό τρίγωνο, αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα·

Διαμερίζουμε το $\widetilde{I}$ σε δύο ίσα μέρη $\widetilde{I}^{(1)}, \widetilde{I}^{(2)}$. Όμοια για $\widetilde{J}, \widetilde{K}$.
Τουλάχιστον ένας από τους τρεις επαγόμενους γράφους $G[\widetilde{I}^{(a)}, \widetilde{J}^{(b)}, \widetilde{K}^{(c)}]$ περιέχουν αρνητικό τρίγωνο. Αποφάσισε ποιος, και αναδρομή!

Πριν προχωρήσουμε, προσοχή!
Ερώτηση: Πως εντοπίζουμε ένα αρνητικό τρίγωνο, αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα·

Διαμερίζουμε το $\widetilde{I}$ σε δύο ίσα μέρη $\widetilde{I}^{(1)}, \widetilde{I}^{(2)}$. Όμοια για $\widetilde{J}, \widetilde{K}$.
Τουλάχιστον ένας από τους τρεις επαγόμενους γράφους $G[\widetilde{I}^{(a)}, \widetilde{J}^{(b)}, \widetilde{K}^{(c)}]$ περιέχουν αρνητικό τρίγωνο. Αποφάσισε ποιος, και αναδρομή!

$$T_{\text{εντοπισμός τριγώνου}}(n) \leq 2^3 \cdot T_{\text{απόφαση ύπαρξης}}(n/2) + T_{\text{εντοπισμός τριγώνου}}(n/2).$$

Άρα,

$$T_{\text{εντοπισμός τριγώνου}}(n) = O(T_{\text{απόφαση ύπαρξης}}).$$

Αλγόριθμος.
Για όλα τα $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$:
Όσο το $G[\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}]$ περιέχει αρνητικό τρίγωνο: Βρες ένα αρνητικό τρίγωνο (i, j, k) και θέσε $w(i, j) = \infty$.

Αλγόριθμος.
Για όλα τα $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$:
Όσο το $G[\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}]$ περιέχει αρνητικό τρίγωνο: Βρες ένα αρνητικό τρίγωνο (i, j, k) και θέσε $w(i, j) = \infty$.
Συνολικός χρόνος:
((πλήθος αρνητικών τριγώνων) + (πλήθος τριάδων))
$\cdot O\left(T_{\text{απόφαση ύπαρξης}}(n)\right) \leq$

Αλγόριθμος.
Για όλα τα $(\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K})$:
Όσο το $G[\widetilde{I}, \widetilde{J}, \widetilde{K}]$ περιέχει αρνητικό τρίγωνο: Βρες ένα αρνητικό τρίγωνο (i, j, k) και θέσε $w(i, j) = \infty$.
Συνολικός χρόνος:
((πλήθος αρνητικών τριγώνων) + (πλήθος τριάδων))
$\cdot O\left(T_{\text{απόφαση ύπαρξης}}(n)\right) \leq$

$$((n/s)^3 + n^2) \cdot O(T_{\text{απόφαση ύπαρξης}}(s)).$$

Θέτοντας $s = \lceil n^{1/3} \rceil$ έχουμε ότι
$T_{\text{απόφαση ύπαρξης}}(n) \leq n^{3-\epsilon}$ δίνει χρόνο $O(n^{3-\epsilon/3})$.

Οι αναγωγές που αποκαλύψαμε μέχρι στιγμής.

1. APSP υποκυβικά ισοδύναμο με τον υπολογισμό (Μιν,+) γινομένου.

Οι αναγωγές που αποκαλύψαμε μέχρι στιγμής.

1. APSP υποκυβικά ισοδύναμο με τον υπολογισμό (Μιν,+) γινομένου.
2. Υποκυβική αναγωγή του προβλήματος αρνητικού Τριγώνου σε (Μιν,+) Γινόμενο.

Οι αναγωγές που αποκαλύψαμε μέχρι στιγμής.

1. APSP υποκυβικά ισοδύναμο με τον υπολογισμό (Μιν,+) γινομένου.
2. Υποκυβική αναγωγή του προβλήματος αρνητικού Τριγώνου σε (Μιν,+) Γινόμενο.
3. Υποκυβική αναγωγή (Μιν,+) γινόμενου σε πρόβλημα Αναφοράς Αρνητικών τριγώνων.

Οι αναγωγές που αποκαλύψαμε μέχρι στιγμής.

1. APSP υποκυβικά ισοδύναμο με τον υπολογισμό (Μιν,+) γινομένου.
2. Υποκυβική αναγωγή του προβλήματος αρνητικού Τριγώνου σε (Μιν,+) Γινόμενο.
3. Υποκυβική αναγωγή (Μιν,+) γινόμενου σε πρόβλημα Αναφοράς Αρνητικών τριγώνων.
4. Υποκυβική αναγωγή προβλήματος Αναφοράς Αρνητικών τριγώνων σε Πρόβλημα αρνητικού τριγώνου.

Οι αναγωγές που αποκαλύψαμε μέχρι στιγμής.

1. APSP υποκυβικά ισοδύναμο με τον υπολογισμό (Μιν,+) γινομένου.
2. Υποκυβική αναγωγή του προβλήματος αρνητικού Τριγώνου σε (Μιν,+) Γινόμενο.
3. Υποκυβική αναγωγή (Μιν,+) γινόμενου σε πρόβλημα Αναφοράς Αρνητικών τριγώνων.
4. Υποκυβική αναγωγή προβλήματος Αναφοράς Αρνητικών τριγώνων σε Πρόβλημα αρνητικού τριγώνου.
5. Όλα τα προαναφερθέντα προβλήματα είναι υποκυβικά ισοδύναμα!

Ευχαριστούμε!