Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Λεπτομερής Πολυπλοκότητα 2019-20

(ΣΗΜΜΥ, ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Βασίλης Νάκος – Άρης Παγουρτζής

1η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1. Όπως είπαμε στην τάξη, στο πρόβλημα των Ορθογώνιων Διανυσμάτων δίνονται δύο οικογένειες διανυσμάτων $A, B \subseteq \{0,1\}^d, |A| = |B| = n$, και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχει $a \in A, b \in B$ ώστε $\langle a, b\rangle = 0$. Η υπόθεση δυσκολίας που είδαμε είναι ότι το εν λόγω πρόβλημα δεν επιδέχεται αλγόριθμο χρόνου $n^{2-\epsilon} \cdot \text{poly}(d)$), με $\epsilon > 0$.

(α) Έστω το πρόβλημα των *ανισόρροπων* Ορθογώνιων Διανυσμάτων, όπου $|A| = n, |B| = \sqrt{n}$, και ζητείται πάλι να βρεθεί $a \in A, b \in B$ ώστε $\langle a, b\rangle = 0$. Να δειχθεί ότι το πρόβλημα των Ορθογώνιων Διανυσμάτων και το πρόβλημα των ανισόρροπων Ορθογώνιων Διανυσμάτων είναι ισοδύναμα.

(β) Δίνονται δύο σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{Z}^d$, και ζητείται να βρεθεί το $\max_{a\in A, b\in B}\langle a, b\rangle$. Δείξτε ότι το εν λόγω πρόβλημα δεν έχει αλγόριθμο χρόνου $n^{2-\epsilon} \cdot \text{poly}(d)$ για $\epsilon > 0$, εκτός αν η εικασία των Ορθογώνιων Διανυσμάτων καταρρέει.

(γ) Μέχρι στιγμής, έχουμε ορίσει το πρόβλημα Ορθογώνιων Διανυσμάτων ως πρόβλημα απόφασης. Δείξτε ότι αν υπάρχει $n^{2-\epsilon} \cdot \text{poly}(d)$ αλγόριθμος που αποφασίζει αν υπάρχει ζεύγος ορθογώνιων διανυσμάτων, τότε υπάρχει και αλγόριθμους χρόνου $n^{2-\epsilon'} \cdot \text{poly}(d)$, για $\epsilon' := \epsilon'(\epsilon)$, ο οποίος βρίσκει ένα τέτοιο ζεύγος. Τι είναι το ϵ' ως συνάρτηση του ϵ ;

Άσκηση 2. Στο πρόβλημα ελέγχου μετρικότητας δίνεται ένας $n \times n$ πίνακας με εγγραφές στο $\{1, 2 \ldots, n^c\}$, για κάποια (ακέραια) σταθερά c, και ζητείται να αποφασιστεί αν για όλα τα $i, j, k \in [n]$ ισχύει

$$A[i, j] \leq A[i, k] + A[k, j].$$

Δείξτε ότι το πρόβλημα ελέγχου μετρικότητας είναι υποκυβικά ισοδύναμο με το Πρόβλημα των Συντομότεων Μονοπατιών.

Βοήθεια: Για τη μία κατεύθυνση, κάντε αναγωγή στο (Min,+) γινόμενο. Για την άλλη ανάγετε από το Πρόβλημα Αρνητικού Τριγώνου. Για τη δεύτερη αναγωγή, ίσως σας βοηθήσει να ορίσετε ένα ενδιάμεσο πρόβλημα, που αφορά τον εντοπισμού αρνητικού τριγώνου σε τριμερή γραφήματα.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι οι κατώθι δύο εκδοχές του προβλήματος 3SUM είναι ισοδύναμες.

- Δίνονται $A, B, C \subseteq \mathbb{Z}$, και πρέπει να αποφανθείτε αν υπάρχει $(a, b, c) \in A \times B \times C$ ώστε $a+b+c = 0$.
- Δίνεται $X \subseteq \mathbb{Z}$ και πρέπει να αποφανθείτε αν υπάρχει $(a, b, c) \in X \times X \times X$ ώστε $a + b + c = 0$.

Υπενθυμίζουμε ότι δουλεύουμε στο μοντέλο Word-RAM, στο οποίο υποθέτουμε μηχανή η οποία μπορεί να κάνει βασικές πράξεις σε (πρόσθεση,αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση με υπόλοιπο) μεταξύ οποιωνδήποτε δύο αριθμών που δίνονται ως είσοδο του προβλήματος σε χρόνο $O(1)$.

Άσκηση 4.

Υπενθυμίζεται το πρόβλημα του Συνελικτικού 3SUM. Δίνεται πίνακας $A := [A[0], A[1], \ldots, A[n-1]]$, και ζητείται να βρεθεί αν υπάρχουν δείκτες $i, j, i + j \leq n - 1$ ώστε $A[i] + A[j] = A[i + j]$. Δίνεται ως δεδομένο επίσης ότι το πρόβλημα αυτό είναι υποτετραγωνικά ισοδύναμο με το 3SUM.

Θεωρούμε το πρόβλημα εντοπισμού τριγώνου μηδενικού βάρους σε τριμερή γραφήματα $G(V \cup U \cup W, E)$, δηλαδή εύρεση κορυφών $(i, j, k) \in U \times V \times W$ ώστε

$$w(i, j) + w(j, k) + w(k, i) = 0.$$

Σε αυτή την άσκηση θα δείξουμε ότι ότι το συνελικτικό 3SUM μπορεί να αναχθεί σε χρόνο $O(n^{1.5})$ σε $\sqrt{n}$ στιγμιότυπα του προβλήματος εντοπισμού τριγώνου μηδενικού βάρους σε τριμερή γραφήματα, όπου κάθε μέρος έχει $O(\sqrt{n})$ κορυφές. Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι το n είναι τέλειο τετράγωνο, και ορίζουμε $[n] := \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

⋆ Αναγωγή: Για $i \in [\sqrt{n}]$, κατασκευάζουμε ένα γράφο G_i με διαμερίσεις U_i, V_i, W_i, με $|U_i| = |V_i| = \sqrt{n}, |W_i| = 2\sqrt{n}$. Επιπρόσθετα, αντιστοιχούμε κάθε κορυφή στο U_i (αντίστοιχα στο V_i) με έναν αριθμό στο $[\sqrt{n}]$, και κάθε κορυφή του W_i με έναν αριθμό στο $[2\sqrt{n}]$, κατά τον προφανή τρόπο. Οι ακμές ανάμεσα στις διαμερίσεις είναι:

- Για κάθε $q \in W_i, t \in V_i$, αν $q - t \in [\sqrt{n}]$, τα ενώνουμε με ακμή με βάρος $A[i\sqrt{n} + (q-t)]$.
- Για κάθε $s \in V_i, t \in U_i$, τοποθετούμε μεταξύ τους ακμή βάρους $A[s\sqrt{n} + t]$.
- Για κάθε $s \in U_i, q \in W_i$ τοποθετούμε ακμή βάρους $-A[(s+i)\sqrt{n} + q]$ (εφόσον $(s+i)\sqrt{n} + q \leq n-1$).

(α) Δείξτε ότι λύνοντας το πρόβλημα εντοπισμού τριγώνου μηδενικού βάρους σε καθένα από τα G_i, μπορούμε να λύσουμε το συνελικτικό 3SUM. Ποιος είναι ο χρόνος της αναγωγής;

(β) Δείξτε ότι το πρόβλημα εντοπισμού τριγώνου μηδενικού βάρους σε τριμερή γραφήματα δε λύνεται σε αυστηρά υποκυβικό χρόνο στο πλήθος των κορυφών του γραφήματος, εκτός αν η 3SUM υπόθεση καταρρέει.

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις ...., σε ηλεκτρονική μορφή. Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση `finegrained@corelab.ntua.gr`.