Descriptive complexity of approximate counting CSPs

Chris Doulamis

ALMA

05/07/2022

Μετρητικά Προβλήματα

Έστω σ ένα πεπερασμένο λεξιλόγιο και εστω $Struct(\sigma)$ να είναι το σύνολο όλων των δομών με λεξιλόγιο σ.

Ορισμός

Ένα μετρητικό πρόβλημα είναι μία απεικόνιση $C : Struct(\sigma) \rightarrow \mathbb{Z}^+$

Η ισοδήναμα μπορούμε να το σκεφτόμαστε ότι ένα μετρητικό πρόβλημα ορίζετε απο μια φόρμουλα φ πρώτης τάξης αν για κάθε στηγμηότηπο **A** του προβλήματος, ο αριθμός των *satisfying assignments* στις ελεύθερες μεταβλητές της φ στη δομή, είναι ίσος με το $C(A)$.

Για παράδειγμα:

- $\#SAT$: Δοσμένου ενός CNF, υπολόγισε το πλήθος των *truth assignments*.
- $\#IndependentSet$: Δοσμένου ενός γράφου,υπολόγισε το πλήθος των ανεξάρτητων συνόλων.

Περιγραφική Πολυπλοκότητα

Στην περιγραφική πολυπλοκότητα δεν ορίζουμε τις κλάσεις με το μοντέλο της MT, αλλά μας ενδιαφέρει σε ποια γλώσσα της λογικής μπορεί να εκφραστή κάποιο πρόβλημα ή όλα τα προβλήματα μιας κλάσης.

Η περιγραφική πολυπλοκότητα ενός προβλήματος μπορούμε να την καταλάβουμε ως τον πλούτο της γλώσσας ώστε να εκφράσει το πρόβλημα.

Πλέον, μια είσοδο σε ένα πρόβλημα θα την βλέπουμε σαν μια πεπερασμένη δομή (που θα έχει μόνο σχέσεις).

Εμείς αυτό που θα κάνουμε είναι μελετήσουμε την πολυπλοκότητα προσεγγιστικά μετρητικών προβλημάτων μέσω της περιγραφικής πολυπλοκότητας.

Εισαγωγικοί ορισμοί

Εστω A ένα πεπερασμένο σύνολο.

- Μια k-άδα $(a_1, ..., a_k)$ σε ένα σύνολο A είναι οποιοδήποτε στοιχείο του A^k. Θα χρησιμοποιούμε έντονα γράμματα για να δηλώσουμε k-άδες οποιουδήποτε μήκους.
- Μια σχέση, μεγέθους k, στο A είναι μια συλλογή από k-άδες πάνω στο A,(ένα υποσύνολο του A^k).
- Το Λεξιλόγιο τ, είναι μια συλλογή σχεσιακών συμβόλων (-κατηγορημάτων) της μορφής P^k.
- Μια δομή **A** με λεξιλόγιο τ (τ-δομή) αποτελείται από ένα σύνολο A που ονομάζεται σύμπαν του **A** και για κάθε $R \in$ τ, έστω μεγέθους k, μια σχέση $R^{\mathbf{A}}$ στο A, που ονομάζεται ερμηνεία του P στο **A**. Θα χρησιμοποιούμε έντονα και λοξά κεφαλαία γράμματα για να συμβολίσουμε μια δομή και το σύμπαν της, αντίστοιχα.
- Κάθε λεξιλόγιο και δομή (που θα δούμε) είναι πεπερασμένει.

Εισαγωγικοί ορισμοί

Ορισμός, Πολυμορφισμός

- Έστω R σχέση, πάνω σε ένα σύνολο A και $f : A^n \to A$ μια n-αδική πράξη στο ίδιο σύνολο,

  Η συνάρτηση f θα λέγεται πολυμορφισμός της R αν για κάθε επιλογή $a_1, ..., a_n$ των n-άδων από το R το $f(a_1, ..., a_n)$ θα ανήκει επίσης στο R. Αλιός θα το λέμε ότι η R είναι αναλλοίωτη κάτω από την f.

  Η f θα είναι ένας πολυμορφισμός μιας δομής **A** αν είναι πολυμορφισμός κάθε σχέσης στην **A**.

Εισαγωγικοί ορισμοί

Έστω A, B πεπερασμένα σύνολα και έστω $f : A \to B$, $\forall$ σχέση P στο A, με $f(R)$ συμβολίζουμε το $\{f(a)|a \in R\}$.

Ορισμός Ομομορφησμός - Ισομορφισμός

- Έστω ότι $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ να είναι δομές του ίδιου λεξιλογίου τ με σύμπαντα A και B αντίστοιχα,

  Η απεικόνιση f λέγεται ομομορφισμός από το **A** στο **B** αν για κάθε σύμβολο R από το τ ,$f(R^{\mathbf{A}}) \subseteq R^{\mathbf{B}}$.

  Ένας ομομορφισμός f από το **A** στο **B** λέγεται ισομορφισμός αν είναι 1-1 και επί (ο f^{-1} είναι ομομορφισμός από το **B** στο **A**).

Constraint Satisfaction Problems (*CSPs*)

- Τα *CSP* αποτελούν μια πλούσια κατηγορία αλγοριθμικών προβλημάτων.
- Σε ένα *CSP* ο στόχος είναι να βρεθεί μια ανάθεση στις μεταβλητές που υπόκεινται σε συγκεκριμένους περιορισμούς.
- Έχει παρατηρηθεί απο τους *Feder* και *Vardi* ότι, τα *CSPs* μπορούμε να τα βλέπουμε σαν προβλήματα ομομορφισμόν:
- Δοσμένων δυο δομών **A** και **H**, αποφάσισε αν υπάρχει ομομορφισμός απο το **A** στο **H**.
- Στα $\#CSPs$ ο στόχος είναι να βρεθεί το πλήθος των *truth assignments*.

Έστω δομή $\mathbf{H} \in Struct(\sigma)$.

Το $\#CSP(\mathbf{H})$ είναι το ακόλουθο πρόβλημα

Δοσμένης πεπερασμένης δομής $\mathbf{A} \in Struct(\sigma)$, υπολόγισε των αριθμό των ομομορφισμών από το **A** στο **H**.

Constraint Satisfaction Problems (CSPs)

Παράδειγμα

Στο πρόβλημα 3-*SAT*, ένα στιγμιότυπο είναι μια 3-*CNF* φόρμουλα. Για παράδειγμα,

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_4 \vee x_5 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_3),$$

και η ερώτηση είναι αν η φ είναι ικανοποιήσιμη.
Το 3-*SAT* είναι ισοδύναμο με το $CSP(\mathbf{H}_{3-SAT})$, όπου $\mathbf{H}_{3-SAT}$ είναι μια δομή με σύμπαν $\{0,1\}$ και τις σχέσεις $R_{a,b,c} = \{0,1\}^3 \setminus \{(a,b,c)\}$, $a, b, c \in \{0,1\}$. Στο παράδειγμα της φ οι αντίστοιχες σχέσεις θα είναι, $R_{0,1,0}, R_{1,0,1}, R_{1,1,1}$.
Αντίστηχα στο $\#3 - SAT$ ισοδύναμα έχουμε το $\#CSP(H_{3-SAT})$.

Πολυπλοκότητα Προσεγγιστικών Προβλημάτων

- Πολύ λίγα μη τετριμμένα μετρητικά προβλήματα λύνονται σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικο χρόνο.
- Όταν δεν μπορούμε να βρούμε ακριβής λύση τότε μπορούμε να ψάξουμε για μια καλή προσέγγιση.
- Ο *Dyer* έχει αναφέρει ότι το πιο αποτελεσματικό μοντέλο αποδοτικά προσεγγιστικών αλγορίθμων είναι οι *FPRAS*.
- Η προσεγγιστική πολυπλοκότητα των μετρητικών προβλημάτων μετράται μέσω των $AP-$αναγογων (*approximationpreserving*), όπου είναι σχεδιασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε η κλάση των προβλημάτων που λύνονται από *FPRAS* να είναι κλειστοί με $AP-$αναγογές.

Πολυπλοκότητα Προσεγγιστικών Προβλημάτων

- $\forall$ πρόβλημα $P \in NP$ υπάρχει το αντίστοιχο μετρητικό πρόβλημα $(\#P)$.
- Τα μετρητικά *CSPs* προβλήματα είναι υποπερίπτωση τον μετρητικών προβλημάτων.
- Στην περίπτωση που θέλουμε να μετρήσουμε ακριβώς το πλήθος των λύσεων σε ενα *CSP* πρόβλημα, τότε είτε θα λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο ή θα είναι πλήρες για τη $\#P$.
- Ο πιο γενικός αλλά πρακτικός τύπος προσεγγιστικών αλγορίθμων για μετρητικά προβλήματα είναι ο *FPRAS* (*fully polynomial randomized approximation schemes*).

Ορισμός *FPRAS*

Έστω C ένα μετρητικό πρόβλημα και I ένα στιγμιότυπο του C, (όπου με $\#I$ θα συμβολίζουμε το πλήθος των λύσεων).
Ένας αλγόριθμος, έστω Alg, θα λέγεται ότι είναι *FPRAS* για το μετρητικό πρόβλημα C αν παίρνει σαν είσοδο ένα στιγμιότυπο I του C και έναν αριθμό ε>0 και βγάζει σαν απάντηση εναν αριθμό $Alg(I,$ε$)$, ικανοποιεί την ανισότητα

$$Pr[e^{-\epsilon} < \frac{Algo(I,\epsilon)}{\#I} < e^{\epsilon}]$$

και είναι πολυωνυμικού χρόνου ως προς το $|I|$ και $log\frac{1}{\epsilon}$

2 παραδειγματα προβληματων που ανήκουν στην κλάση των *FPRAS*:

Πρόβλημα: $\#Match$
Στηγμηότιπο: Ένα γράφημα G.
Έξοδος: Το πλύθος τον τεριασμάτον οπιουδίποθτε μεγέθους στο G.

Πρόβλημα: $\#DNF - Sat$.
Στιγμιότυπο: Φόρμουλα φ σε *DNF* μορφή.
Έξοδος: Το πλύθος τον *truth assignments* στον φ.

Για να συγκρίνουμε τη σχετική πολυπλοκότητα προσεγγιστικών μετρητικών προβλημάτων χρησιμοποιούμε $AP-$αναγωγές.
(*FPRAS* κλειστή ως προς *AP*-αναγωγές)

Ορισμός $AP-$αναγωγή

Έστω A και B μετρητικά προβλήματα, μια $AP-$αναγωγή από το A στο B είναι ένας πιθανοτικός αλγόριθμος Alg όπου, χρησιμοποιεί το B ως μαντείο, παίρνει σαν είσοδο ένα ζευγάρι (I,ε), όπου I ένα στιγμιότυπο του A και 0<ε<1 και ικανοποιεί τα ακόλουθα (3):

- Κάθε κλήση που γίνεται στο μαντείο απο τον Alg είναι στην μορφή (I′,δ), όπου I′ ειναι ένα στιγμιότυπο του B και 0 <δ< 1 είναι το σφάλμα τέτοιο ώστε το $log\frac{1}{\delta}$ είναι φραγμένο πολυωνυμικά στο μέγεθος του I και το $log\frac{1}{\epsilon}$ $(\leq poly(|I|, log\frac{1}{\epsilon}))$.

Πολυπλοκότητα Προσεγγιστικών Προβλημάτων

Ορισμός $AP-$αναγωγή

- Ο αλγόριθμος Alg πληροί της προδιαγραφές να είναι ενα προσεγγιστικό σχήμα για το Α οποτεδήποτε το μαντείο πληροί της προδιαγραφές για να είναι ένα προσεγγιστικό σύστημα για το Β.
- Ο χρόνος εκτελέσης για τον Alg είναι πολυωνυμικός στο μέγεθος του Ι και του $log\frac{1}{\epsilon}$.

Αν υπάρχει $AP-$αναγωγή από το Α στο Β θα το συμβολίζουμε $A \leq_{AP} B$ και θα λέμε ότι το Α ειναι $AP-$αναγώγημο στο Β.

Επίσης, αν υπάρχει $AP-$αναγωγή από το Α στο Β αλλά και από το Β στο Α, θα λέμε ότι τα Α και Β είναι $AP-$αλληλοαναγώγημα και θα το συμβολιζουμε $A \equiv_{AP} B$

Η κλάσει των προβλημάτων $AP-$αναγώγημον με το $\#BIS$

Πρόβλημα $\#BIS$: Το μετρητικό πρόβλημα BIS (*Bipartite Independent Set*), μας δίνουν ένα διμερές γράφημα G και η ερώτηση είναι πόσα είναι τα ανεξάρτητα σύνολα στο G.

Το $\#BIS$ μπορεί να αναχθεί στο $\#CSP(H_{BIS})$, αλλά δεν είναι ξεκάθαρο αν μπορεί να αναπαρασταθεί σαν $\#CSP$

Η δυο "πιο φυσιολογικές" προσεγγιστικές κλάσης προβλημάτων κάτω απο $AP-$αναγωγές είναι:

- Τα προβλήματα που επιδέχονται έναν αποδοτικό προσεγγιστικό αλγόριθμο, $FPRAS$.
- Τα προβλήματα όπου είναι πλήρει για την $\#P$ (η πιο σωστά $FP^{\#P}$ καθός η κλάση $\#P$ δεν είναι κλειστή με $AP-$αναγωγές). Εδώ το "βασικό " πρόβλημα είναι το $\#SAT$ (όπου όλα είναι αλληλοαναγώγημα μεταξύ τους)

Η κλάσει των προβλημάτων $AP-$αναγώγημον με το $\#BIS$

- Ο *Dyer* υποστήριξε ότι το $\#BIS$ ορίζει μια δική του κλάση από μόνο του: Κανένας *FPRAS* δεν είναι γνωστό για αυτό το πρόβλημα, και πιστεύετε ότι δεν είναι ανάγεται στο $\#SAT$.
- Επιπλέον, όλα τα προβλήματα που φαίνεται να βρίσκονται αυστηρά μεταξύ της κλάσης των προβλημάτων που επιτρέπουν ένα *FPRAS* και της κλάσης των $\#P - Hard$ ανάγονται με το $\#BIS$ ($AP-$αναγωγές).
- Η τελευταία είναι η κλάση των μετριτικών προβλημάτων AP-αναγώγιμων με το $\#BIS$. Αυτά περιλαμβάνουν τα "δυσκολότερα στην προσέγγιση" προβλήματα μέτρησης εντός της κλάσης $\#P$.

Παραδείγματα AP-αλληλοαναγώγιμα με το $\#BIS$

- $\#DownSet$. Ένα *downset* σε μία μερική διάταξη ενός συνόλου P, $(P, \leq)$, είναι ένα σύνολο $A \subseteq P$ τέτοιο ώστε οποτεδήποτε $b \in A \wedge a \leq b$, το στοιχείο $a \in A$.
  Η ερώτηση είναι, δοσμένης μιας μερικής διάταξης $(P, \leq)$ σε ένα σύνολο P, βρές των αριθμό των *downset* στο P.

- $\#ANTICHAIN$. Ένα *antichain* σε μία μερική διάταξη ενός συνόλου P, $(P, \leq)$, είναι ένα σύνολο $C \subseteq P : a \leq b$ για κανένα $a, b \in C$.
  Η ερώτηση είναι, δοσμένης μιας μερικής διάταξης $(P, \leq)$ σε ένα σύνολο P, βρες των αριθμό των *antichain* στο P

Παραδείγματα AP-αλληλοαναγώγιμα με το $\#BIS$

Παρατήρηση: Αυτά τα δύο προβλήματα μοιάζουνε.
Αν το σύνολο $C \subseteq P$ ειναι ενα *ANTICHAIN* τότε το σύνολο, $\{a \in P | a \leq b$, με $b \in C\}$ είναι ένα *DownSet*. Και αντίστροφα, αν το σύνολο $A \subseteq P$ ειναι ενα *DownSet* τότε αν πάρουμε τα μέγιστα στοιχεια του A, σεβόμενη την μερικη διαταξη, σχηματιζουν ενα *ANTICHAIN*.

Αντίστοιχα, για τα προβλήματα της μορφής $\#CSP(H)$ αποδεικνύεται ότι,

- είτε επιλύεται ακριβώς σε πολυωνυμικό χρόνο (και άρα ανήκει στο *FPRAS*) ή υπάρχει αλγόριθμος *FPRAS*.
- είτε είναι AP-αναγώγιμα με το $\#SAT$
- είτε είναι AP-αναγώγιμα με το $\#BIS$

Περιγραφική Πολυπλοκότητα Προσεγγιστηκά Μετρητικών Προβλημάτων

Με βάση των χαρακτηρισμό του *Fagin* για τιην *NP*, Ο Σαλουτζα εξέφρασε τα μετρητικά προβλήματα μέσω της γλώσσας της λογικής.

Σημείωση: Παρακάτω χρησιμοποιούμε το λεξιλογιο σ για να αναπαραστήσουμε της μεταβλητές δεύτερης τάξης. Ως εκ τούτου, οι τύποι πρώτης τάξης, έχουν μόνο ελεύθερες μεταβλητές πρώτης τάξης.

Ορισμός

Έστω τ και σ πεπερασμένα λεξιλόγια και εστω C ένα μετρητικό πρόβλημα (μπορούμε να το σκεφτόμαστε ως μια απεικόνιση απο τ-δομών στους μη αρνητικούς ακέραιους). Έστω $\varphi(z)$ να είναι μια πρώτης-τάξης φόρμουλα με λεξιλόγιο $\tau \cup \sigma$ με πρώτης τάξης ελεύθερες μεταβλητές z, και έστω $\mathbf{A}$ να είναι τ-δομή,

Περιγραφική Πολυπλοκότητα Προσεγγιστηκά Μετρητικών Προβλημάτων

Ορισμός

- Η φόρμουλα φ θα λέγεται *monadic* αν όλες η σχέσης στο σ έχουν μέγεθος το πολύ 1.
- Μια A-ανάθεση στον φ θα είναι ένα ζευγάρι (T, a) όπου τα Tκαι a θα είναι η ερμηνείες των σ και z, πάνω στο σύμπαν A του $\mathbf{A}$.
- Θα γράφουμε (A, T) για να συμβολίζουμε (τ∪σ)-δομή με σύμπαν A, όπου κάθε σχέση $R \in$ τ ερμηνεύεται όπως στο $\mathbf{A}$ και κάθε σχέση $I \in$σ ερμηνεύεται όπως στο $\mathbf{T}$.
- Θα λέμε ότι μια ανάθεση (T, a) θα ικανοποιεί την φ αν $(A, T) \models \varphi(a)$, δλδ η $\varphi(a)$ είναι αληθης στην τ∪σ-δομή.
- Θα λέμε ότι η φ ορίζει την C αν για κάθε τ-δομη $\mathbf{A}$, $C(\mathbf{A}) = |\{(T, a) | (A, T) \models \varphi(a)\}|$ (δλδ $C(\mathbf{A}) = \#$ των αναθέσεων, των ελεύθερων μεταβλητών, όπου κάνουν την φ αληθή στο $\mathbf{A}$)

Περιγραφική Πολυπλοκότητα Προσεγγιστηκά Μετρητικών Προβλητάτων

Παράδειγμα: Το πρόβλημα $\#IS$ του να μετρήσουμε το πλήθος των ανεξάρτητων συνόλων ενός γραφήματος $G = (V, E)$, ορίζεται από την φόρμουλα,

(λεξιλόγιο σ=$\{E\}$), $\forall x, y(\neg E(x, y) \vee \neg I(x) \vee \neg I(y))$, (όπου το I είναι δεύτερης τάξης ελεύθερη μεταβλητή).

- Θα συμβολίζουμε με $\#FO$ το σύνολο όλων των μετριτικόν προβληματων όπου ορίζονται από μία φόρμουλα πρώτης τάξης. Επίσης θα λέμε ότι μία δομή **A** είναι διατεταγμένη (*ordered*) αν έχει μια δυαδική σχέση που ερμηνεύεται ως ολική διάταξη πάνω στο σύμπαν A.

Περιγραφική Πολυπλοκότητα Προσεγγιστηκά Μετρητικών Προβλήάτων

Θεώρημα (*Saluja et al.*):

$$\#\Sigma_0 = \#\Pi_0 \subset \#\Sigma_1 \subset \#\Pi_1 \subset \#\Sigma_2 \subset \#\Pi_2 = \#FO$$

- Σ_0 Π_0, φόρμουλες χωρίς ποσόδειξη..
- Σ_1, $\exists \overrightarrow{x} \psi(\overrightarrow{x})$
- Π_1, $\forall \overrightarrow{x} \psi(\overrightarrow{x})$
- Σ_2, $\exists \overrightarrow{x} \forall \overrightarrow{y} \psi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$
- Π_2, $\forall \overrightarrow{x} \exists \overrightarrow{y} \psi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$

Περιγραφική Πολυπλοκότητα Προσεγγιστηκά Μετρητικών Προβλήάτων

Οι *Dyer et al*, στην ερευνά τους για την κλάση των προβλημάτων που είναι *AP*-αναγώγιμα με $\#BIS$, όρισαν τη λογική $RH\Pi_1 \subseteq \Pi_1$.

Ορισμός

Μια πρώτης τάξης φόρμουλα, εστω $\varphi(z)$, με λεξιλόγιο $\tau \cup \sigma$ ανήκει στην λογική $RH\Pi_1$ αν είναι στην μορφή,
$\forall y \psi$, όπου η φόρμουλα ψ είναι χωρίς ποσοδείκτες, σε *CNF* μορφή όπου, κάθε *clause* θα εχει το πολύ ενα εμφανιζόμενο θετικό σχεσιακό σύμβολο απο το σ και ενα εμφανιζόμενο αρνητικό σχεσιακό σύμβολο απο το σ.

Παρατήρηση: Το Π_1 σημβολήζη ότι η φόρμουλα περιέχει μόνο τον καθολικό ποσοδείκτη, και το *RH* προέρχεται από το ότι η φόρμουλα έχει κάποιους περιορισμούς (είναι στην μορφή *Horn*, *restricted Horn*).

Περιγραφική Πολυπλοκότητα Προσεγγιστηκά Μετρητικών Προβλήάτων

Παράδηγμα: Έστω ότι έχουμε το λεξηλόγιο $\tau = \{L, R, M\}$. Η φόρμουλα

$$\forall x, y, z (R(x) \vee \neg L(y, v) \vee \neg S(x, v)) \wedge \\ (M(x, u, v) \vee U(x) \vee \neg U(v)) \wedge \\ (M(x, y, z) \vee R(v))$$

ανήκη στο $RH\Pi_1$.

Έχει αποδηχτή ότι,

Θεώρημα

Όλα τα προβλήματα που ανήκουν στην κλάσει $\#RH\Pi_1$ είναι $AP-$ αναγώγιμα με το $\#BIS$.

Τι θα θέλαμε να δήξουμε..

Το ιδανικό

Θα θέλαμε να χαρακτηρίσουμε της δομές, έστω H για τις οποίες $\#CSP(H)$ θα ανήκει στην $\#RH\Pi_1$

Τι θα κάνουμε στην πραγματηκότητα,

Τι θα μελετήσουμε

Θα ερευνήσουμε για ποιες δομές, έστω H, το $\#CSP(H)$ θα ανήκει στο *monoton* $\#RH\Pi_1$

Ορισμός

Το *monoton* $RH\Pi_1$ είναι ένας περιορισμός πάνω στο $RH\Pi_1$ όπου όλα τα σύμβολα σχέσεων στο λεξιλόγιο σ εμφανίζονται αρνητικά στην φορμουλα.

Τα προβλήματα, $\#DownSet$ και $\#ANTICHAIN$, μπορούν να γραφουν σαν μια φόρμουλα που ανήκη στο *monoton* $RH\Pi_1$.

Αποδεικνύεται ότι, αν απλά μας ενδιαφέρουν να αποφασίσουμε αν ο αριθμός τον ομορφισμών είναι μεγαλύτερος του μηδέν, τοτε το *monoton* $RH\Pi_1$ είναι τόσο "εκφραστηκό" όσο το $RH\Pi_1$.

Ορισμός

Θα λέμε ότι μια τ-δομή, έστω **H**, περιέχει την ισότητα αν το λεξιλογιο τ περιέχει μια δυαδική σχέση, που θα την συμβολίζουμε *eq* και θα ερμηνεύεται ως η ισότητα πάνω στο σύμπαν H (δλδ $H^{eq} = \{(b, b) | b \in H\}$)

Distributive − Lattice

Ένα *lattice* **H** είναι μια δομή με σύμπαν H εφοδιασμένο με δυο δυαδικές σχέσης, $\sqcap, \sqcup : H \times H \to H$ όπου $\forall x, y, z \in H$ ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

$(1) x \sqcap x = x \sqcup x = x$
$(2) x \sqcap y = y \sqcap x,\ x \sqcup y = y \sqcup x$
$(3) x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z,\ x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$
$(4) x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcup (x \sqcap y)$

Έπίσης το *lattice* **H** θα λεγέτε *distributive* αν ικανοποιεί και τον εξής περιορισμό,

$(5) x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap y)$

Main Result

Παρατηρηση: Κάθε *lattice* έχει μια μερική διάταξη στο σύμπαν της όπου, το $x \leq y$ ανν $x \sqcap y = x$

Το κεντρικό αποτέλεσμα της εργασίας είναι το εξής,

Θεώρημα

Για κάθε δομή **H** ισχύουν τα ακόλουθα:

1) Αν η δομη **H** έχει πολυμορφισμούς ως προς της σχέσης $x \sqcap y$ και $x \sqcup y$ για κάποιο *distributive lattice* $(\mathbf{H}; \sqcap, \sqcup)$, τότε υπάρχει *monoton* $RH\Pi_1$ φόρμολα όπου ορίζει το $\#CSP(\mathbf{H})$

2)Επίσης, αν η **H** περιέχει την σχέσει της ισότητας τότε ισχύει και το ανάποδο.

Απόδειξη (1), θεώρημα

Η δομη **H** έχει πολυμορφισμό ως προς της σχέσης $x \sqcap y$ και $x \sqcup y$ για κάποιο *distributive lattice* $(\mathbf{H}; \sqcap, \sqcup)$

Αφού το $(\mathbf{H}; \sqcap, \sqcup)$ είναι *distributive* (δηλαδή ισχύει και 5η συνθήκη, $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap y)$), τότε μπορούμε να μετονομάσουμε τα $\sqcap, \sqcup$ σε $\wedge, \vee$,

Επίσης αφού η **H** έχει πολυμορφισμο ως προς της σχέσης $x \sqcap y$ και $x \sqcup y$, το ιδιο θα ισχύει και με την αλλαγη που κάναμε (δλδ διατηρουντε η αλγεβρικές αναλλοίωτες της δομής).

Άρα με αυτό τον τρόπο, κάθε στιγμιότυπο του $\#CSP(\mathbf{H})$ μπορεί να ξαναγραφτεί σαν *boolean* $\#CSP$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι υπάρχει *monoton* $RH\Pi_1$ φόρμουλα που οριζει το $\#CSP(\mathbf{H})$.

Για να αποδείξουμε το (2) του Θεωρήματος, θα χρειαστούμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1

Για κάθε δομή **H**, αν το $\#CSP(\mathbf{H})$ ορίζεται από μια φόρμουλα που ανήκει στο *monoton* $RH\Pi_1$ τότε θα ορίζεται και από μια φόρμουλα που θα ανήκει στο *monadic monoton* $RH\Pi_1$ και δεν θα έχει ελευθερες μεταβλητές.

Απόδηξη της Πρότασης 1:

- Έστω **H** να είναι μια τ-δομη, και έστω φόρμουλα φ να είναι μια *monoton* $RH\Pi_1$, με λεξιλόγιο $\tau \cup \sigma$, όπου ορίζει το $\#CSP(\mathbf{H})$.
- Αποδηκνήετε ότι, αν φ είναι μια *monoton* $RH\Pi_1$ φόρμουλα τότε η φ ειναι προταση (*sentence*: δλδ μια φόρμουλα χωρής ελεύθερες μεταβλητές).

Αποδηξη (2), θεώρημα

- Επίσης αποδεικνύεται ότι, για κάθε επιλογή ενός κατηγορήματος, έστω I απο το σ, ισχύει ότι,

$$\varphi \models \forall x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k \ \neg(x_i = y_i) \vee \neg I(x_1, ..., x_k) \vee I(y_1, ..., y_k).$$

- Διαλέγουμε "στην τύχη" ένα κατηγόρημα I από το σ (με μέγεθος $k \geq 2$), οπότε η φ ικανοποιεί την ακριβώς από πάνω συνθήκη. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το I με ένα νέο μοναδιαίο κατηγόρημα I' και να δημιουργήσουμε μια νέα φ′ με λεξιλόγιο $\tau \cup \sigma'$, αντικαθιστώντας στην φορμουλα φ όπου I το I'. (Επειδή η φ είναι χωρίς ελεύθερες μεταβλητές αποδεικνύεται ότι το $I(z_1, ..., z_k)$ εξαρτάται αποκλειστικά από τη μεταβλητή z_i, $i \in \{1, 2, ..., k\}$)

Απόδειξη (2), θεώρημα

- Προφανώς η φ' έχει το ίδιο πλήθος αλληθοπηών τημοδοσηών με την φ και επιπλέον έχει έναν λιγότερο μη-μοναδιαίο κατηγόρημα.

- Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία μπορουμε να καταλήξουμε σε μια πρόταση όπου όλα τα κατηγορηματα θα είναι μοναδιαία.

- Άρα, για μια δομή **H**, αν το $\#CSP(\mathbf{H})$ ορίζεται από μια φόρμουλα που ανήκει στο *monoton* $RH\Pi_1$ τότε θα ορίζεται και από μια φόρμουλα που θα ανήκει στο *monadic monoton* $RH\Pi_1$ και δεν θα έχει ελευθερες μεταβλητές.

Απόδειξη (2), θεώρημα

Τώρα θα αποδείξουμε το (2) του θεωρήματος.

Έστω ότι το $\#CSP(\mathbf{H})$ ορίζεται από μια φόρμουλα φ όπου ανήκει στο *monoton* $RH\Pi_1$, τότε

- Άπο την προταση 1 έχουμε ότι αφού το $\#CSP(\mathbf{H})$ ορίζετε από μια φόρμουλα που ανήκει στο *monoton* $RH\Pi_1$ τότε θα ορίζεται και από μια φόρμουλα που θα ανήκει στο *monadic monoton* $RH\Pi_1$ και δεν θα έχει ελευθερες μεταβλητές. (αυτο το χρησιμοποιεί η αποδειξη του παρακάτω)

- Με τη χρήση του απο πάνω αποδεικνύεται ότι, υπάρχει μια δομή $\mathbf{B}_\phi$ τέτοια ώστε για κάθε δομή $\mathbf{A} \in Struct(\sigma)$, ο αριθμός των αναθέσεων τιμών που κάνουν τον φ αληθεί στη δομή $\mathbf{A}$ είναι ίσος με τον αριθμό των ομομορφισμών από τη δομή $\mathbf{A}$ στη δομή $\mathbf{B}_\phi$.

- Η $\mathbf{B}_\phi$ έχει κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει πολυμορφισμος ως προς της δυαδικες σχέσης $x \sqcap y$ και $x \sqcup y$ για

Απόδηειξη (2), θεώρημα

- Από τα παραπάνω έχουμε ότι, $\#hom(\mathbf{A}, \mathbf{H}) = \#hom(\mathbf{A}, \mathbf{B}_\phi)$.
- Απο γνωστό λήμμα έχουμε ότι, (1) Αν η **H** περιέχει την δυαδική σχέση της ισότητας τότε τα **H** και $\mathbf{B}_\phi$ είναι ισομορφικά και (2) έχουμε ότι $\mathbf{B}_\phi$ έχει πολυμορφισμούς ως προς $x \sqcap y$ και $x \sqcup y$.
- Άρα και η **H** έχει πολυμορφισμούς ως προς της σχέσης $x \sqcap y$ και $x \sqcup y$.
- Επομένος αν η **H** περιέχει την ισότητα τοτε, Αν υπάρχει *monoton* $RH\Pi_1$ φόρμουλα που ορίζει το $\#CSP(\mathbf{H})$ τότε η δομή **H** έχει πολυμορφισμούς ως προς $x \sqcap y$ και $x \sqcup y$.

Συμπεράσματα:

- Δήξαμε ότι το $\#CSP(\mathbf{H})$ μπορεί να οριστεί από έναν τύπο φ που ανήκει στο $RH\Pi_1$, οποτεδήποτε η δομή $\mathbf{H}$ έχει, ως πολυμορφισμούς τις δυο σχέσης $\sqcap$ και $\sqcup$ ενός *distributive lattice*.
- Επίσης, είναι το καλύτερο δυνατό που θα μπορούσαμε να πετύχουμε μελετώντας της αλγεβρικες αναλλοίωτες της δομης $\mathbf{H}$ (δλδ τους πολυμορφισμούς της $\mathbf{H}$).

Συμπεράσματα:

- Επίσης αποδείξαμε ότι, αν το $\#CSP(\mathbf{H})$ μπορεί να οριστεί απο εναν τύπο στο *monotone* $RH\Pi_1$ και η δομη **H** εμπεριέχει την σχέσει της ισότητας τότε η **H** θα πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από τις δύο σχέσεις του *distributive lattice*, δηλαδή η **H** θα έχει πολυμορφισμούς ως προς τις δυο σχέσεις.
- Δεδομένου ότι το σύνολο των πολυμορφισμών μιας δομής δεν αλλάζει αν προσθέσουμε τη σχέση της ισότητας σε αυτό, το αποτέλεσμα του κεντρικού θεωρήματος συνεπάγονται έναν πλήρη χαρακτηρισμό για τον ορισμο των $\#CSPs$ μέσω της *monotone* $RH\Pi_1$ λογικής.

Linear Datalog

- Το *Datalog* έχει χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο στη θεωρία των βάσεων δεδομένων και στα *CSP* προβλήματα απόφασης.
- Το *Datalog* είναι "λογική" γλώσσα προγραμματισμού που αναπτύχθηκε για να διευκολύνει την έρευνα στην θεωρία των βάσεων δεδομένων.
- Θα δουμε πως το *Datalog* συνδέεται με τα μετρητικά *CSP*.

Ορισμός *Datalog*

Έστω τ και σ πεπερασμένα λεξιλόγια, τα στοιχεία από το τ λέγονται *EDBs* (*Extensional DataBase symbols*) και τα στοιχεία από το σ λέγονται *IDBs* (*Intensional DataBase symbols*).

Ορισμός *Datalog*

Κάθε *Datalog* πρόγραμμα είναι μία συλλογή κανόνων της μορφής, $\psi_1 : \psi_2, ..., \psi_m$, όπου τα $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$ είναι ατομικές φορμουλες με κατηγορήματα απο το λεξιλόγιο τ∪σ.
Η αριστερή πλευρά του κανόνα ονομάζεται κεφαλή και τα σύμβολα κατηγορημάτων που εμφανίζεται σε αυτή πρέπει να είναι ένα απο το σ.
Η δεξιά πλευρά ονομάζεται σώμα του κανόνα και μπορεί να περιέχει κατηγορήματα από το σ και το τ.
Ένας κανόνας ονομάζεται γραμμικός αν στο σώμα περιέχεται το πολύ μία εμφάνιση ενός κατηγορήματος απο το σ.
Ένα πρόγραμμα *Datalog* λέγεται γραμμικό αν όλοι οι κανόνες του είναι γραμμικοί.

Τα *CSP* προβληματα απόφασης που εκφράζονται μέσω των *Linear Datalog* ανήκουν στην κλάση *NL*.
Είναι ανοιχτό ερώτημα αν ισχύει το αντίστροφο (εικάζεται πως ισχύει).

Linear Datalog

- Ένα πρόγραμμα *Datalog* P εφαρμόζεται σε μια δομή **A** χρησιμοποιώντας τα σταθερά σημεία. Δηλαδη,
- Έστω T να είναι η ερμηνεία του σ στη δομή **A** με σύμπαν A. Τότε, το T θα λέμε ότι είναι σταθερό σημείο του προγραματος P στην δομή **A** αν για κάθε κανόνα του προγραμματος ισχύει ότι
  Για κάθε ερμηνεία των μεταβλητών ενος κανονα που κανουν το σώμα του κανόνα αληθή θα πρέπει και η κεφαλη του κανόνα να ειναι αληθής στην ερμηνεία T.
- Για μια τ-δομη **H** θα λέμε ότι ενα *Datalog* προγραμμα P ορίζι το πρόβλημα $\#CSP(\mathbf{H})$ αν για κάθε τ-δομη **A** ο αριθμός των ομομορφισμών απο το **A** στο **H** είναι ίσος με των αριθμό των σταθερών σημείων το P στο **A**.
- Λίγο πιο απλά, μπορούμε να το σκεφτόμαστε ότι το *Linear Datalog* είναι ένα υποσύνολο του *monoton* $RH\Pi_1$ και τα σταθερά σημεία ως της αλληθοπηους τημοδοσήες στην αντίστοιχη φόρμουλα (που ορίζεται απο το $RH\Pi_1$).

Παρατήρηση: Το *Datalog* είναι γνήσιο υποσύνολο του *monotone* $RH\Pi_1$, συνεπώς θα είναι και λιγότερο "εκφραστικό".

Λήμμα

Κάθε *Linear Datalog* πρόγραμμα είναι ισοδύναμο με μια *monotone* $RH\Pi_1$ φόρμουλα όπου σε κάθε *clause* εμφανίζεται ένα μη-αρνητικό κατηγόρημα από το σ.
Αντίστροφα, κάθε *monotone* $RH\Pi_1$ φόρμουλα όπου σε κάθε *clause* εμφανίζεται ένα μη-αρνητικό κατηγόρημα από το σ είναι ισοδύναμα με ένα *Linear Datalog* πρόγραμμα.

Το κεντρικό αποτέλεσμα σε αυτή την ενότητα είναι το αντίστοιχο του θεωρήματος που δείξαμε πριν, ότι το $\#CSP(\mathbf{H})$ μπορεί να οριστεί από έναν τύπο φ που ανήκει στο $RH\Pi_1$, οποτεδήποτε η δομή $\mathbf{H}$ έχει, ως πολυμορφισμούς τις δυο σχέσης $\sqcap$ και $\sqcup$ ενός *distributive lattice*.

Θεώρημα

Για κάθε δομή $\mathbf{H}$ ισχίουν τα ακόλουθα,

- Αν η δομή $\mathbf{H}$ έχει πολυμορφισμούς ως προς τις σχέσης $x \sqcap y$, $x \sqcup y$ και $\top$ (επιστρέφει το μεγαλύτερο στοιχείο του *lattice* και είναι μηδενοθέσηο σύμβολο κατηγορήματος) για κάποιο *distributive lattice* $(\mathbf{H}; \sqcap, \sqcup)$ τότε υπάρχει ένα *Linear Datalog* πρόγραμμα όπου ορίζει το $\#CSP(\mathbf{H})$.
- Επήσης, αν η $\mathbf{H}$ περιέχει το σύμβολο της ισότητας τοτε ισχύει και το ανάποδο.

Ανοιχτά προβλήματα προς απόδειξη

- Για κάθε δομή $\mathbf{H}$, αν το $\#CSP(\mathbf{H})$ ανήκει στο $\#RH\Pi_1$ τότε θα ανήκει και στο *monotone* $\#RH\Pi_1$.

- Για κάθε δομή $\mathbf{H}$, αν το $\#CSP(\mathbf{H})$ ανήκει στο $\#RH\Pi_1$ τότε και το $\#CSP(\mathbf{H} \cup \{eq\})$ θα ανήκει στο $\#RH\Pi_1$.


The End