

Μάθημα: Μετρητική Πολυπλοκότητα  
 Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Α. Παγουρτζής  
 Εξάμηνο: Εαρινό 2022

## 1 Μέτρηση συνόλων που είναι κλειστά προς τα κάτω

Έστω η μερική διάταξη  $\leq$  ορισμένη σε ένα πεπερασμένο σύνολο  $K$ . Ένα σύνολο  $S \subseteq K$  λέγεται κλειστό προς τα κάτω ως προς την  $\leq$ , αν ισχύει η συνθήκη  $y \in S$  και  $x \leq y$ , τότε  $x \in S$ . Δεδομένου κατευθυνόμενου γράφου  $G = (V, E)$  τέτοιου ώστε  $V = K$  και  $(x, y) \in E \iff x \leq y$ , δείξτε ότι το  $\text{Hom}(G, H)$ , όπου  $H$  είναι ο παρακάτω κατευθυνόμενος γράφος



είναι ίσο με το πλήθος των συνόλων που είναι κλειστά προς τα κάτω ως προς την  $\leq$ .

**Παρατήρηση:** Εναλλακτικά, μπορείτε να δείξετε ότι το  $\text{Hom}(G, H)$  είναι ίσο με το πλήθος των αντιαλυσίδων. Ένα σύνολο  $S$  είναι αντιαλυσίδα αν για κάθε  $x, y \in S$ , αν  $x \neq y$  τότε  $x \not\leq y$  και  $y \not\leq x$ .

## 2 Θεωρήματα διχοτομίας I

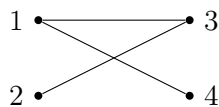
Χρησιμοποιώντας κατάλληλο θεώρημα διχοτομίας, προσδιορίστε αν καθένα από τα  $\#\text{CSP}(\{\text{OR}\})$  και  $\#\text{CSP}(\{\text{NAND}\})$  είναι στην κλάση FP ή  $\#\text{P}$ -πλήρες, όπου  $\text{OR} = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  και  $\text{NAND} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ .

## 3 Θεωρήματα διχοτομίας II

Το πρόβλημα  $\#\text{VERTEX COVERS}$  είναι το πρόβλημα μέτρησης των καλυμμάτων κορυφών όλων των μεγεθών σε γενικό γράφο. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο θεώρημα διχοτομίας, δείξτε ότι το πρόβλημα  $\#\text{VERTEX COVERS}$  είναι  $\#\text{P}$ -πλήρες.

## 4 Το πρόβλημα $\#\text{BIS}$

Δείξτε ότι το πρόβλημα μέτρησης ανεξάρτητων συνόλων σε διμερή γράφο  $G$ , το οποίο συμβολίζουμε  $\#\text{BIS}$ , ανάγεται στο πρόβλημα μέτρησης των ομομορφισμών από το  $G$  στο  $H$ , όπου  $H$  είναι ο παρακάτω γράφος:



## 5 $f_{\text{praus}}$ συνεπάγεται $f_{\text{pras}}$ για το $\#IS$

Δείτε παρόμοιες ανισότητες με τις (3.4) και (3.5) σελ. 26 στο βιβλίο του Jerrum για το πρόβλημα των ανεξάρτητων συνόλων (όλων των μεγεθών) σε γενικούς γράφους, ώστε να ισχύει η Πρόταση 3.4 για αυτό το πρόβλημα.

## 6 Στάσιμη κατανομή μαρκοβιανής αλυσίδας

Λύστε την άσκηση 3.10 σελ. 29 από το βιβλίο του Jerrum.

Προθεσμία υποβολής: 19/5/2022