

Μάθημα: Μετρητική Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Α. Παγουρτζής

Εξάμηνο: Εαρινό 2022

1 Προβλήματα στην κλάση #P

Δείξτε ότι τα παρακάτω προβλήματα ανήκουν στην κλάση #P.

- (α') #PERFECT MATCHINGS: Δέχεται ως είσοδο ένα γράφο $G = (V, E)$ και επιστρέφει το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του G .
- (β') #HAMILTON CYCLES: Δέχεται ως είσοδο ένα γράφο $G = (V, E)$ και επιστρέφει το πλήθος των κύκλων *Hamilton* του G .
- (γ') #PRIME FACTORS: Δέχεται ως είσοδο ένα φυσικό αριθμό n και επιστρέφει το πλήθος των πρώτων παραγόντων του n .

2 Πρόβλημα στην #P που επιδέχεται αποδοτικό αλγόριθμο

Δείξτε ότι το παρακάτω πρόβλημα επιλύεται σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο.

#2-COLORINGS: Δέχεται ως είσοδο γράφο $G = (V, E)$ και επιστρέφει το πλήθος των 2-χρωματισμών του G .

3 Πληρότητα για την κλάση #P

- (α') Δείξτε ότι το πρόβλημα #SAT είναι πλήρες ως προς *parsimonious* αναγωγές.
- (β') Δεδομένου ότι το πρόβλημα #PERMANENT είναι #P-πλήρες ως προς *Turing* αναγωγές, δείξτε ότι το πρόβλημα #2SAT είναι #P-πλήρες ως προς *Turing* αναγωγές.
- (γ') Αποδείξτε ότι αν το πρόβλημα #A είναι #P-πλήρες ως προς *parsimonious* αναγωγές, τότε το πρόβλημα $L_A = \{x \mid \#A(x) > 0\}$ είναι NP-πλήρες.
- (δ') Αποδείξτε ότι αν το πρόβλημα #PERMANENT είναι #P-πλήρες ως προς *parsimonious* αναγωγές, τότε $P = NP$.

4 #CSP και Holant προβλήματα

Εκφράστε το #SAT ως Holant πρόβλημα και το #PERFECT MATCHINGS ως #CSP.

5 \mathcal{F} -πύλες

- (α') Κατασκευάστε μία \mathcal{F} -πύλη που να πραγματοποιεί τη συνάρτηση (signature) $EVEN_4$, όπου $\mathcal{F} = \{EVEN_3\}$.
- (β') Κατασκευάστε μία \mathcal{F} -πύλη που να πραγματοποιεί τη συνάρτηση $EVEN_k$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{F} = \{EVEN_3\}$.

6 #CSP και Holant προβλήματα

Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{C}$, οι συναρτήσεις (signatures) $[x, 1, x]$ και $[x, 1, 1, x]$ μπορούν να πραγματοποιηθούν από πύλες ταιριασμάτων (matchgates) χρησιμοποιώντας τον αντιστρέψιμο 2×2 πίνακα

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Προθεσμία υποβολής: 14/4/2022