Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Άρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Π. Γροντάς

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 15/12/2022

Άσκηση 1: Πολύχρωμος Πεζόδρομος (1.4 μον.)

Ο νέος πεζόδρομος της Πολυτεχνειούπολης είναι σχεδόν έτοιμος! Εκτείνεται σε μια νοητή ευθεία και έχει πλακοστρωθεί με n πλάκες. Κάθε πλάκα καταλαμβάνει όλο το πλάτος του πεζόδρομου, οπότε ο πεζόδρομος μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία n πλακών που εκτείνονται από την αρχή του μέχρι το τέλος του. Η Αρχιτεκτονική Σχολή έχει εκπονήσει μελέτη που καθορίζει τα χρώματα $(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_n)$ όλων των πλακών κατά μήκος του πεζόδρομου, ώστε ο περίπατος σε αυτόν να είναι ευχάριστος και χαλαρωτικός. Απομένουν μόνο το βάψιμο των πλακών και τα εγκαίνια για το κοινό.

Το συνεργείο που θα βάψει τις πλάκες χρησιμοποιεί μια πρωτοποριακή μέθοδο που εγγυάται βέλτιστο αποτέλεσμα (αν και καθυστερεί λίγο παραπάνω – η καλή δουλειά αργεί να γίνει!). Η ιδέα είναι ότι κάθε μέρα, το συνεργείο επιλέγει ένα διάστημα διαδοχικών πλακών του πεζοδρόμου και τις χρωματίζει όλες με το ίδιο επιλεγμένο χρώμα (ως αποτέλεσμα, μπορεί κάποιες πλάκες σε αυτό το διάστημα να μην έχουν το τελικό τους χρώμα, αυτό θα διορθωθεί τις επόμενες ημέρες). Μετά το συνεργείο αφήνει τις πλάκες να στεγνώσουν, και την άλλη μέρα επαναλαμβάνει για κάποιο άλλο διάστημα. Αυτό μέχρι όλες οι πλάκες να βαφούν στο επιθυμητό χρώμα.

Υπάρχει συζήτηση για το αν θα έχει ολοκληρωθεί ο χρωματισμός των πλακών και θα μπορέσουν να γίνουν τα εγκαίνια πριν τα Χριστούγεννα. Με δεδομένα ότι αρχικά όλες οι πλάκες είναι λευκές και την ακολουθία $(c_1, \ldots, c_n)$ με τα επιθυμητά χρώματα των πλακών, να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει το ελάχιστο πλήθος ημερών που απαιτούνται για να ολοκληρωθεί ο χρωματισμός των πλακών του πεζόδρομου. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Θεωρούμε 10 πλάκες που πρέπει να βαφούν με τα παρακάτω χρώματα $(1, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 1, 6)$. Αν αρχικά όλες οι πλάκες είναι λευκές $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, θα δείξουμε ότι η βέλτιστη λύση απαιτεί 6 ημέρες εργασίας από το συνεργείο χρωματισμού. Την 1η μέρα το συνεργείο βάφει τις πρώτες 9 πλάκες με το χρώμα 1: $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$. Την 2η μέρα το συνεργείο βάφει τις πλάκες από 2 μέχρι και 8 με το χρώμα 2: $(1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 0)$. Την 3η μέρα το συνεργείο βάφει τις πλάκες από 3 μέχρι και 7 με το χρώμα 3: $(1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 0)$. Την 4η μέρα το συνεργείο βάφει τις πλάκες από 4 μέχρι και 6 με το χρώμα 4: $(1, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 0)$. Την 5η μέρα το συνεργείο βάφει την πλάκα 5 με το χρώμα 1: $(1, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 1, 0)$. Και την 6η μέρα το συνεργείο βάφει την πλάκα 10 με το χρώμα 6: $(1, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 1, 6)$.

Άσκηση 2: String matching (1.4 μον.)

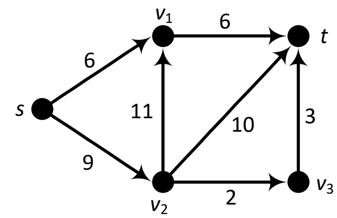
Περιγράψτε μια τροποποίηση του αλγορίθμου KMP (Knuth Morris Pratt) στην οποία το μοτίβο (pattern) μπορεί να περιέχει οποιοδήποτε αριθμό συμβόλων μπαλαντέρ *, καθένα από τα οποία ταιριάζει με μια αυθαίρετη συμβολοσειρά. Π.χ., το μοτίβο ABR*CAD*BRA εμφανίζεται στο κείμενο SCHABRAINCADBRANCH. Στην περίπτωση αυτή, το δεύτερο * ταιριάζει με την κενή συμβολοσειρά. Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να εκτελείται σε χρόνο $O(m + n)$, όπου m είναι το μήκος του μοτίβου και n είναι το μήκος του κειμένου (text).

Άσκηση 3: Συντομότερα Μονοπάτια με Συντομεύσεις Ενδιάμεσων Ακμών (1.8 μον.)

Θεωρούμε κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, \vec{w})$ με n κορυφές, m ακμές και θετικά μήκη $\vec{w}$ στις ακμές, δυο συγκεκριμένες κορυφές $s, t \in V$, και θετικό ακέραιο $k \geq 1$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση (δηλ. το μήκος του συντομότερου $s - t$ μονοπατιού) της κορυφής t από την κορυφή s στο G, όταν μπορούμε να μηδενίσουμε το μήκος το πολύ k ακμών στο $s - t$ μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε. Στις παρακάτω περιπτώσεις να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων σας.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει την απόσταση της t από την s, όταν μπορούμε να μηδενίσουμε το μήκος μίας μόνο ακμής στο $s-t$ μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε.
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει την απόσταση της t από την s, όταν μπορούμε να μηδενίσουμε το μήκος το πολύ k ακμών στο $s-t$ μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε. Ο αλγόριθμός σας πρέπει να δέχεται το k ως παράμετρο και να λειτουργεί σωστά για κάθε $k \geq 1$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το διπλανό γράφημα. Έστω $d_k(v,u)$ η απόσταση μιας κορυφής u από μια κορυφή v, όταν μπορούμε να μηδενίσουμε το πολύ k ακμές στο συντομότερο $u-v$ μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε. Τότε έχουμε $d_0(s,t)=12$, $d_1(s,t)=5$ (χρησιμοποιούμε το μονοπάτι (s,v_2,v_3,t) και μηδενίζουμε την ακμή (s,v_2)), και $d_k(s,t)=0$, για κάθε $k \geq 2$ (χρησιμοποιούμε το μονοπάτι (s,v_1,t) και μηδενίζουμε τις δύο ακμές).

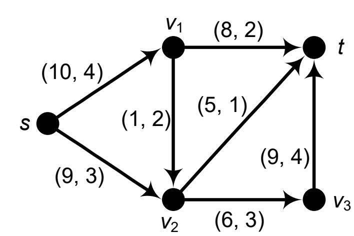


Άσκηση 4: Σύντομα Μονοπάτια με Επαρκή Μεταφορική Ικανότητα (2 μον.)

Θεωρούμε κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E,\vec{c},\vec{b})$ με n κορυφές και m ακμές, όπου κάθε ακμή $e \in E$ έχει ακέραιο κόστος $c(e) > 0$ και ακέραιη μεταφορική ικανότητα $b(e) > 0$. Δεδομένων μιας αφετηρίας $s \in V$ και ενός προορισμού $t \in V$, θέλουμε να υπολογίσουμε ένα $s-t$ μονοπάτι σχετικά μικρού συνολικού κόστους και σχετικά μεγάλης μεταφορικής ικανότητας. Το συνολικό κόστος ενός μονοπατιού p είναι $c(p)=\sum_{e\in p} c(e)$ (βλ. το άθροισμα του κόστους των ακμών του p). Η μεταφορική ικανότητα ενός μονοπατιού p είναι $b(p)=\min_{e\in p}\{b(e)\}$ (βλ. η ελάχιστη μεταφορική ικανότητα μιας ακμής του p). Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα $s-t$ μονοπάτι p που ελαχιστοποιεί τον λόγο του κόστους προς τη μεταφορική ικανότητα του μονοπατιού, βλ. τον λόγο $c(p)/b(p)$.

1. Να δείξετε, μέσω αντιπαραδείγματος, ότι μπορεί το πρόθεμα ενός βέλτιστου (ως προς το κριτήριο του κόστους προς μεταφορική ικανότητα) $s-t$ μονοπατιού να μην είναι βέλτιστο μονοπάτι.
2. Να διατυπώσετε αναδρομική σχέση που επιτρέπει τον υπολογισμό ενός $s-t$ μονοπατιού με βέλτιστο λόγο κόστους προς μεταφορική ικανότητα.
3. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός $s-t$ μονοπατιού με βέλτιστο λόγο κόστους προς μεταφορική ικανότητα. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Παράδειγμα: Στο διπλανό κατευθυνόμενο γράφημα, σημειώνονται ως διατεταγμένα ζεύγη (c,b) το κόστος και η μεταφορική ικανότητα κάθε ακμής. Το μονοπάτι (s,v_1,t) εξασφαλίζει λόγο κόστους προς μεταφορική ικανότητα $18/2=9$. Το μονοπάτι (s,v_1,v_2,v_3,t) εξασφαλίζει λόγο $26/2=13$. Το μονοπάτι (s,v_1,v_2,t) εξασφαλίζει λόγο $16/1=16$. Η βέλτιστη λύση στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι το μονοπάτι (s,v_2,v_3,t) που εξασφαλίζει λόγο $24/3=8$.



Άσκηση 5: Αγορές Προϊόντων από Συγκεκριμένα Καταστήματα (2 μον.)

Έστω σύνολο καταστημάτων $S=\{s_1,\dots,s_m\}$ και σύνολο προϊόντων $P=\{p_1,\dots,p_n\}$, όπου κάθε προϊόν p_i πωλείται από συγκεκριμένο υποσύνολο καταστημάτων $S_i \subseteq S$. Στις παρακάτω περιπτώσεις να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων σας.

1. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα σύνολο καταστημάτων $S' \subseteq S$, $|S'|=n$, από τα οποία μπορούμε να προμηθευτούμε όλα τα προϊόντα, αν αγοράζουμε ακριβώς ένα προϊόν από κάθε κατάστημα του S' (αν δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο, ο αλγόριθμος πρέπει να το διαπιστώνει και να το πιστοποιεί).
2. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει ένα μέγιστο (ως προς τον πληθικό του αριθμό) σύνολο προϊόντων και καταστημάτων $S' \cup P'$, $S' \subseteq S$, $P' \subseteq P$, τέτοιο ώστε κανένα από τα προϊόντα του P' να μην πωλείται από τα καταστήματα του S'.

Άσκηση 6: Ενοικίαση Αυτοκινήτων (1.4 μον.)

Έστω μια μικρή εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων που λειτουργεί με μακροπρόθεσμες προσφορές που λαμβάνει από τους πελάτες της, τις οποίες αποδέχεται ή απορρίπτει. Η εταιρεία διαθέτει k (ίδια) αυτοκίνητα προς ενοικίαση και υπάρχουν n προσφορές από τους πελάτες της εταιρείας, όλες γνωστές εκ των προτέρων. Κάθε προσφορά (s_i, t_i, p_i) αναφέρει τη χρονική στιγμή δέσμευσης του αυτοκινήτου $s_i \in \mathbb{N}$, τη χρονική στιγμή αποδέσμευσης του αυτοκινήτου $t_i \in \mathbb{N}$, και το αντίτιμο $p_i \in \mathbb{N}^*$ που προσφέρει ο ενοικιαστής. Αν η εταιρεία αποδεχθεί την προσφορά, δεσμεύει ένα από τα αυτοκίνητα προς ενοικίαση για το χρονικό διάστημα $[s_i, t_i)$ και εισπράττει το αντίτιμο p_i. Στόχος της εταιρείας είναι να μεγιστοποιήσει το συνολικό ποσό που θα εισπράξει ως αντίτιμο (με τον περιορισμό ότι ο αριθμός των δεσμευμένων αυτοκινήτων δεν θα ξεπεράσει το k σε καμία χρονική στιγμή).

Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της ενοικίασης αυτοκινήτων, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγόριθμου σας. Προσέξτε ότι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας μπορεί να εξαρτάται από τα n και k, αλλά όχι από τις τιμές των s_i, t_i, και p_i.