



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Άρ. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου, Π. Γροντάς

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 10/1/2023

Άσκηση 1: Δώρο Χριστουγέννων

Η κυβέρνηση της επαρχίας του Δυναμικού Προγραμματισμού, στη χώρα των Αλγορίθμων, θέλει να πείσει τους πάντες ότι το Δώρο των Χριστουγέννων, που λαμβάνουν ως επιμίσθιο οι εργαζόμενοι για τις γιορτές, αυξάνεται σχεδόν κάθε χρόνο τα τελευταία N χρόνια. Η στατιστική υπηρεσία συνέλεξε τα δεδομένα και άρχισε να τα επεξεργάζεται. Εκτίμησαν το μέσο ύψος p_i του Δώρου, για κάθε έτος $i = 1, \dots, N$, και υπολόγισαν τη Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία της ακολουθίας (p_1, p_2, \dots, p_N) .

Δυστυχώς, τα αποτελέσματα δεν ήταν ακριβώς αυτά που περίμεναν. Σας ανέθεσαν λοιπόν να “πειραματιστείτε” με τα δεδομένα, με στόχο να υπολογίσετε μια ελαφρώς τροποποιημένη ακολουθία, που όμως θα περιέχει σημαντικά μεγαλύτερη Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία. Θεωρούν ότι αν για το μέσο ύψος του Δώρου των Χριστουγέννων, διαμορφωθεί μια ακολουθία (q_1, q_2, \dots, q_N) που προκύπτει από την αρχική (p_1, p_2, \dots, p_N) προσθέτοντας την ίδια τιμή x , $-K \leq x \leq K$, στις τιμές ενός διαστήματος (p_l, \dots, p_r) της αρχικής, η τροποποίηση δύσκολα θα γίνει αντιληπτή, και η κυβέρνηση δεν θα αναγκαστεί να αναιρέσει τον ισχυρισμό της.

Έχετε λοιπόν στη διάθεσή σας την πραγματική ακολουθία (p_1, p_2, \dots, p_N) του Δώρου των Χριστουγέννων για τα τελευταία N χρόνια και έναν μη αρνητικό ακέραιο K . Ζητείται να υπολογίσετε τη μέγιστη δυνατή Μέγιστη Αύξουσα Υπακολουθία που μπορεί να επιτευχθεί από μια τροποποιημένη ακολουθία (q_1, q_2, \dots, q_N) , για την οποία ισχύει ότι υπάρχει ένα διάστημα δεικτών $[l, r]$ και μια τιμή x , $-K \leq x \leq K$, έτσι ώστε $q_i = p_i + x$, για κάθε έτος i στο διάστημα $[l, r]$, και $q_i = p_i$ για κάθε έτος i εκτός του διαστήματος $[l, r]$.

Δεδομένα Εισόδου: Η πρώτη γραμμή της εισόδου θα αποτελείται από δύο ακέραιους N και K που εκφράζουν το πλήθος των ετών (το N) και τη μέγιστη δυνατή απόκλιση από τις πραγματικές τιμές (το K). Προσέξτε ότι το K μπορεί να είναι 0. Η δεύτερη γραμμή της εισόδου θα περιέχει N μη αρνητικούς ακέραιους p_1, p_2, \dots, p_N που εκφράζουν το μέσο ύψος του Δώρου των Χριστουγέννων για καθένα από τα τελευταία N χρόνια.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει έναν μη αρνητικό ακέραιο που αντιστοιχεί στο μέγιστο μήκος της Μέγιστης Αύξουσας Υπακολουθίας που μπορεί να επιτευχθεί από μια τροποποιημένη ακολουθία (q_1, q_2, \dots, q_N) , για την οποία ισχύει ότι υπάρχει ένα διάστημα δεικτών $[l, r]$ και μια τιμή x , $-K \leq x \leq K$, έτσι ώστε $q_i = p_i + x$, για κάθε $i \in [l, r]$, και $q_i = p_i$ για κάθε $i \notin [l, r]$.

Περιορισμοί:

$$3 \leq N \leq 2 \cdot 10^5$$

$$0 \leq K \leq 10^9$$

$$0 \leq p_i \leq 10^9$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

8 10

7 3 5 12 2 7 3 4

Παράδειγμα Εξόδου:

5

Άσκηση 2: Χριστουγεννιάτικη Σκυταλοδρομία

Ο Αι Βασίλης μόλις διαπίστωσε ότι δεν έχουν φτάσει ακόμη στο Ροβανιέμι τα γράμματα με τις επιθυμίες των παιδιών από τη χώρα των Αλγορίθμων. Οι βοηθοί του πρέπει να φροντίσουν ώστε οι επιθυμίες των παιδιών να φτάσουν άμεσα στα χέρια του, για να προλάβει να έχει έτοιμα τα δώρα τους για τα Χριστούγεννα.

Η χώρα των Αλγορίθμων έχει N μεγάλες πόλεις V_1, \dots, V_N στις οποίες έχουν συγκεντρωθεί τα γράμματα των παιδιών από τις κοντινές περιοχές. Το οδικό δίκτυο της χώρας είναι ιδιαίτερα απλό και έχει δενδρική δομή.

Κάθε πόλη V_i έχει μοναδική διαδρομή προς την πρωτεύουσα V_1 , και οι βοηθοί του Αι Βασίλη έχουν υπολογίσει ακριβώς την απόσταση D_i της V_i από την επόμενη πόλη στη διαδρομή προς την πρωτεύουσα V_1 . Σε κάθε πόλη V_i , βρίσκεται ένας βοηθός του Αι Βασίλη που χρειάζεται P_i δευτερόλεπτα για να φορτώσει τα γράμματα και να ξεκινήσει με το έλκυθρό του και S_i δευτερόλεπτα για να διανύσει κάθε χιλιόμετρο της διαδρομής $V_i - V_1$.

Οι οδηγίες του Αι Βασίλη είναι σαφείς, οι βοηθοί δεν επιτρέπεται να παρεκκλίνουν από τη διαδρομή προς την πρωτεύουσα. Ένα έλκυθρο που ξεκινάει από την πόλη V_i μπορεί να κινηθεί μόνο στη διαδρομή $V_i - V_1$. Για να επιταχυνθεί η διαδικασία, όταν το έλκυθρο που ξεκίνησε από τη V_i φτάσει σε κάποια ενδιάμεση πόλη V_j , μπορεί είτε να συνεχίσει προς τη V_1 , είτε να παραδώσει τα γράμματα που μεταφέρει στον βοηθό της πόλης V_j , στην περίπτωση που αυτός μπορεί να κινηθεί ταχύτερα. Ο βοηθός V_j θα χρειαστεί, με τη σειρά του, P_j δευτερόλεπτα για να ξεκινήσει με το έλκυθρό του και S_j δευτερόλεπτα για κάθε χιλιόμετρο της διαδρομής $V_j - V_1$.

Όλοι οι βοηθοί είναι έτοιμοι να ξεκινήσουν! Χρειάζονται από σας ένα πλάνο που θα ακολουθεί τους κανόνες του Αι Βασίλη και θα εξασφαλίζει ότι τα γράμματα κάθε πόλης V_2, \dots, V_N θα φτάσουν στην πρωτεύουσα V_1 το συντομότερο δυνατόν (αφού φτάσουν στη V_1 , όλα τα γράμματα μεταφέρονται στιγμαία στο Ροβανιέμι με το έλκυθρο του ίδιου του Αι Βασίλη). Μένει λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει τον ελάχιστο χρόνο (σε δευτερόλεπτα) για να μεταφερθούν τα γράμματα κάθε πόλης V_i στην πρωτεύουσα V_1 .

Λεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμά σας θα διαβάξει από το standard input έναν θετικό ακέραιο N , το πλήθος των πόλεων στις οποίες έχουν συγκεντρωθεί τα γράμματα με τις επιθυμίες των παιδιών. Καθεμία από τις επόμενες $N - 1$ γραμμές θα περιέχει τρεις θετικούς ακέραιους V_i, V_j, D_{ij} , που δηλώνουν ότι υπάρχει διαδρομή μήκους D_{ij} μεταξύ των πόλεων V_i και V_j . Θα ακολουθούν $N - 1$ ακόμη γραμμές με δύο θετικούς ακέραιους η καθεμία. Το ζευγάρι αριθμών P_{i+1} και S_{i+1} στην i -οστή γραμμή δηλώνει ότι το έλκυθρο που ξεκινά από την πόλη V_{i+1} χρειάζεται P_{i+1} δευτερόλεπτα για να ξεκινήσει και S_{i+1} δευτερόλεπτα για κάθε χιλιόμετρο της διαδρομής $V_{i+1} - V_1$. Μπορείτε να θεωρήσετε ως δεδομένο ότι το δίκτυο διαδρομών θα είναι συνεκτικό και θα έχει δενδρική δομή. Για το 80% της βαθμολογίας, θα είναι $N \leq 8000$. Για ένα επιπλέον 30% της βαθμολογίας, θα είναι $2 \cdot 10^4 \leq N \leq 10^5$ και οι πόλεις θα βρίσκονται σε μια νοητή ευθεία που εκτείνεται εκατέρωθεν της πρωτεύουσας V_1 .

Λεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output $N - 1$ θετικούς ακεραίους χωρισμένους με ένα κενό μεταξύ τους. Ο i -ος ακεραίος πρέπει να αντιστοιχεί στον ελάχιστο χρόνο (σε δευτερόλεπτα) για να μεταφερθούν τα γράμματα της πόλης V_{i+1} στην πρωτεύουσα V_1 . Σημειώστε ότι οι ελάχιστοι χρόνοι άφιξης των γραμμάτων στην V_1 (καθώς και κάποια από τα ενδιάμεσα αποτελέσματα που χρειάζονται για τον υπολογισμό τους) μπορεί να υπερβαίνουν το 2^{32} .

Περιορισμοί:

$3 \leq N \leq 8000$ (για 80%)
 $3 \leq N \leq 10^5$ (για 110%)
 $1 \leq D_{ij}, P_i, S_i \leq 10^7$
 Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
 Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

5
 1 2 20
 2 3 12
 2 4 1
 4 5 3
 26 9
 1 10
 500 2
 2 30

Παράδειγμα Εξόδου:

206 321 542 328