Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

Εαρινό εξάμηνο 2022-2023

(ΕΜΠ – ΑΛΜΑ)

Διδάσκοντες: Α. Παγουρτζής – Δ. Φωτάκης – Θ. Λιανέας – Ο. Πλευράκης

2η Σειρά Ασκήσεων

(bonus: η βαθμολογία της σειράς προσαυξάνεται κατά 20%
αν απαντηθούν πλήρως όλα τα ερωτήματα)

Προθεσμία παράδοσης: 30/6/2023

Άσκηση 1 (Online Projected Gradient Descent). Θεωρούμε την online εκδοχή του Projected Gradient Descent. Έστω κυρτό σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^d$. Ο αλγόριθμος OPGD εξελίσσεται σε χρονικό ορίζοντα μήκους $T \in \mathbb{N}$ και χρησιμοποιεί βήμα $\eta > 0$.

Θεωρούμε μια αυθαίρετα επιλεγμένη αρχική λύση $\boldsymbol{x}_1 \in S$. Για κάθε χρονική στιγμή $t = 1, \dots, T$, ο αλγόριθμος OPGD:

1. Λαμβάνει ως είσοδο κυρτή συνάρτηση $f_t : S \to \mathbb{R}_+$, την οποία εφαρμόζει στην τρέχουσα λύση $\boldsymbol{x}_t$. Το κόστος του αλγόριθμου για το βήμα t είναι $f_t(\boldsymbol{x}_t)$.
2. Θέτει $\boldsymbol{y}_{t+1} = \boldsymbol{x}_t - \eta \nabla f_t(\boldsymbol{x}_t)$
3. Ενημερώνει την τρέχουσα λύση σε $\boldsymbol{x}_{t+1} = \arg\min_{\boldsymbol{x} \in S} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_{t+1}\|$, προβάλλοντας το $\boldsymbol{y}_{t+1}$ στο S με βάση την Ευκλείδεια απόσταση.

’Εστω $B = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in S} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ η διάμετρος του S και $G = \max_t \max_{\boldsymbol{x} \in S} \|\nabla f_t(\boldsymbol{x})\|$ ένα άνω φράγμα στο Ευκλείδειο μέτρο του gradient των συναρτήσεων f_t.

1. Να δείξετε ότι για βήμα $\eta = \frac{B}{G\sqrt{T}}$,

$$\sum_{t=1}^{T} f_t(\boldsymbol{x}_t) - \min_{\boldsymbol{x} \in S} \sum_{t=1}^{T} f_t(\boldsymbol{x}) \leq BG\sqrt{T}$$

   Η ποσότητα στο αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας είναι γνωστή ως *regret* του αλγόριθμου (ως προς τη βέλτιστη λύση για το άθροισμα των συναρτήσεων f_t που υπολογίζεται εκ των υστέρων).

2. Να επιλέξετε χρονικά μεταβαλλόμενο βήμα η_t (πλέον το βήμα εξαρτάται από τη χρονική στιγμή t, όχι από το μήκος του χρονικού ορίζοντα T) ώστε να έχουμε regret $O(BG\sqrt{T})$, χωρίς εκ των προτέρων γνώση του μήκους T του χρονικού ορίζοντα.
3. Αν οι συναρτήσεις f_t είναι α-ισχυρά κυρτές, να επιλέξετε βήμα η_t (ως συνάρτηση των α και t) ώστε να έχουμε regret $O(G^2 \ln(T)/\alpha)$.

Άσκηση 2 (Minimax Θεώρημα). Έστω $m \times n$ πίνακας A. Συμβολίζουμε με $\Delta^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \|\boldsymbol{x}\|_1 = 1\}$ το simplex n διαστάσεων (αντίστοιχα, Δ^m είναι το simplex m διαστάσεων). Για $k \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε $[k] = \{1, \dots, k\}$.

(α) Να εκφράσετε το πρόβλημα βελτιστοποίησης $P = \min_{\boldsymbol{x} \in \Delta^n} \max_{j \in [m]} (A\boldsymbol{x})_j$ στο Δ^n ως Γραμμικό Πρόγραμμα ($(A\boldsymbol{x})_j$ είναι η j-οστή συντεταγμένη του n-διανύσματος $A\boldsymbol{x}$). Ο βασικός περιορισμός είναι $\boldsymbol{x} \in \Delta^n$ και η αντικειμενική συνάρτηση είναι $c(\boldsymbol{x}) = \max_{j \in [m]} (A\boldsymbol{x})_j$, την οποία επιδιώκουμε να βελτιστοποιήσουμε.

(β) Να εκφράσετε το πρόβλημα βελτιστοποίησης $D = \max_{\boldsymbol{y} \in \Delta^m} \min_{i \in [n]} (A^T\boldsymbol{y})_i$ στο Δ^m ως Γραμμικό Πρόγραμμα.

(γ) Να δείξετε ότι τα Γραμμικά Προγράμματα που αντιστοιχούν στα προβλήματα βελτιστοποίησης P και D είναι δυϊκά μεταξύ τους. Ως εκ τούτου $P = D$.

(δ) Να δείξετε ότι:

$$\max_{j\in[m]}(A\boldsymbol{x})_j = \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta^m} \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}\,,\ \text{και άρα}\ \min_{\boldsymbol{x}\in\Delta^n}\max_{j\in[m]}(A\boldsymbol{x})_j = \min_{\boldsymbol{x}\in\Delta^n}\max_{\boldsymbol{y}\in\Delta^m} \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}\,,$$

και αντίστοιχα:

$$\max_{\boldsymbol{y}\in\Delta^m}\min_{i\in[n]}(A^T\boldsymbol{y})_i = \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta^m}\min_{\boldsymbol{x}\in\Delta^n} \boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y}$$

Ως συμπέρασμα, καταλήγουμε πως:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\Delta^n}\max_{\boldsymbol{y}\in\Delta^m} \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = \max_{\boldsymbol{y}\in\Delta^m}\min_{\boldsymbol{x}\in\Delta^n} \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}\,,$$

που είναι γνωστό ως *Minimax Θεώρημα του von Neumann*.

(ε) Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες complementary slackness, να δείξετε ότι κάθε ζευγάρι βέλτιστων λύσεων $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ των Γραμμικών Προγραμμάτων P και D αποτελεί ισορροπία Nash στις μεικτές στρατηγικές για το παίγνιο 2 παικτών μηδενικού αθροίσματος που ορίζεται από τον πίνακα A.

Άσκηση 3 (Sparsification)**.** (α) Έστω $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in [0,1]^n$, με $\sum_i x_i = 1$ (θα λέμε ότι το $\boldsymbol{x}$ είναι ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο $[n] \equiv \{1,\dots,n\}$). Έστω ακόμη $k(\varepsilon) = \lceil \ln(2)/(2\varepsilon^2)\rceil + 1$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $k(\varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ στο $[n]$ τέτοιο ώστε $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}| \leq \varepsilon$. Ένα διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ είναι k-*ομοιόμορφο* (k-uniform) αν κάθε y_i είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $1/k$.

(β) Έστω A πίνακας $m \times n$ με όλα τα στοιχεία του στο $[0,1]$ και έστω $\boldsymbol{x}$ ένα διάνυσμα πιθανοτήτων στο $[n]$. Έστω ακόμη $k(m,\varepsilon) = \lceil \ln(2m)/(2\varepsilon^2)\rceil + 1$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $k(m,\varepsilon)$-ομοιόμορφο διάνυσμα πιθανοτήτων $\boldsymbol{y}$ στο $[n]$ τέτοιο ώστε $\|A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y}\|_\infty \leq \varepsilon$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε το ακόλουθο Hoeffding bound: Έστω $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στο $[0,1]$, και έστω $X = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)/n$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\mathrm{r}[|X - \mathbb{E}\mathrm{xp}[X]| > \varepsilon] \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

Άσκηση 4 (Random Sampling)**.** Θεωρούμε μια δημοσκόπηση για τη στάση των πολιτών ως προς μια σημαντική πολιτικο-οικονομική μεταβολή. Οι πολίτες απαντούν στη δημοσκόπηση με “ναι” ή “όχι” (υπέρ ή εναντίον της μεταβολής). Αν το (πραγματικό) ποσοστό των πολιτών που τάσσονται υπέρ της μεταβολής είναι p, θέλουμε να υπολογίσουμε μια εκτίμηση $\hat{p}$ του p ώστε $\mathbb{P}\mathrm{r}[|\hat{p} - p| \leq \varepsilon p] > 1 - \delta$, για δεδομένα $\varepsilon, \delta \in (0,1)$. Για τη δημοσκόπηση, θα ρωτήσουμε N πολίτες, που επιλέγονται ισοπίθανα και ανεξάρτητα από το σύνολο των πολιτών. Η εκτίμησή μας $\hat{p}$ θα είναι το ποσοστό των N πολιτών που τάσσονται υπέρ της μεταβολής. Χρησιμοποιώντας Chernoff-Hoeffding bounds, να υπολογίσετε (ως συνάρτηση των ε, δ, και p) το ελάχιστο μέγεθος N του δείγματος που χρειαζόμαστε. Βρείτε την τιμή του N για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$, αν γνωρίζουμε ότι $p \in [0.1, 0.7]$ (και δείτε ότι αυτή η τιμή είναι ανεξάρτητη του πληθυσμού της χώρας!). Να υπολογίσετε ακόμη το ελάχιστο μέγεθος N' δείγματος (ως συνάρτηση των ε και δ) ώστε η εκτίμησή μας $\hat{p}'$ να ικανοποιεί $\mathbb{P}\mathrm{r}[|\hat{p}' - p| \leq \varepsilon] > 1 - \delta$. Ποια είναι η τιμή του N' για για $\varepsilon = 0.02$ και $\delta = 0.05$; *Σημείωση:* Πρόκειται για παραλλαγή της [1, Άσκησης **4.5**].

Άσκηση 5 (Partial Vertex Cover)**.** Δίνονται γράφημα $G(V,E)$ και παράμετρος $\beta > 0$. Ζητείται υποσύνολο κορυφών $C \subseteq V$ που ελαχιστοποιεί το $\beta|C| + |U(C)|$, όπου $U(C) = \{\{u,v\} \in E : u, v \notin C\}$ είναι οι ακμές που δεν καλύπτονται από το C.

(α) Να διατυπώσετε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα ακέραιου (γραμμικού) προγραμματισμού, να δώσετε το αντίστοιχο LP relaxation, και να βρείτε το αντίστοιχο δυϊκό γραμμικό πρόγραμμα. Να διατυπώσετε το πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιγράφεται από το δυϊκό πρόγραμμα σε φυσική γλώσσα.

(β) Με βάση το LP relaxation του (α), να διατυπώσετε προσεγγιστικό αλγόριθμο που βασίζεται σε deterministic rounding και να αναλύσετε τον λόγο προσέγγισης που επιτυγχάνει ο αλγόριθμός σας.

Άσκηση 6. Να λύσετε την [2, Άσκηση **5.3**] και την [2, Άσκηση **5.6**].

Άσκηση 7 (Truthful Mechanisms for Knapsack)**.** (α) Έχουμε n παίκτες στους οποίους θα μοιράσουμε N κομμάτια σοκολάτας. Το βάρος κάθε κομματιού i είναι α_i γραμμάρια, με $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0$. Κάθε παίκτης j έχει ωφέλεια $v_j > 0$ για κάθε γραμμάριο σοκολάτας που θα πάρει (π.χ., αν ο παίκτης j πάρει τα κομμάτια 1 και 2, η συνολική ωφέλειά του θα είναι $v_j \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)$). Θεωρούμε ότι $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n > 0$, ότι το v_j είναι ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη j, ότι κάθε παίκτης j διεκδικεί w_j κομμάτια σοκολάτας (θεωρούμε ότι το w_j είναι δημόσια γνωστό), και ότι $N = \sum_{j=1}^{n} w_j$ (η υπόθεση για το N είναι χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού μπορεί κάποια από τα τελευταία κομμάτια σοκολάτας να έχουν μηδενικό βάρος). Αρχικά υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης j μπορεί να πάρει οσαδήποτε, από 0 μέχρι και w_j, κομμάτια σοκολάτας. Να διατυπώσετε έναν φιλαλήθη μηχανισμό, περιγράφοντας ποια κομμάτια σοκολάτας θα πάρει κάθε παίκτης και πόσο θα πληρώσει για αυτά. Ο μηχανισμός σας πρέπει να μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια. Είναι ο μηχανισμός που προτείνατε individually rational;

(β) Παραλλάσσουμε το (ii) ως εξής: έχουμε μόνο $K < N$ κομμάτια σοκολάτας μοναδιαίου βάρους (άρα τώρα $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_K = 1$ και $\alpha_{K+1} = \cdots = \alpha_N = 0$) και κάθε παίκτης μπορεί πλέον να πάρει είτε 0 είτε w_j κομμάτια σοκολάτας. Τι συμβαίνει αν εφαρμόσουμε την λύση του (i) σε αυτή την παραλλαγή του προβλήματος; Πιστεύετε ότι υπάρχει μηχανισμός που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, είναι φιλαλήθης, individually rational και υπολογιστικά αποδοτικός; Αν ναι να τον διατυπώσετε και να τον αναλύσετε, αν όχι, να το αιτιολογήσετε κατάλληλα.

(γ) Παραλλάσσουμε το (β) ως εξής: το πλήθος w_j των κομματιών που διεκδικεί κάθε παίκτης j είναι και αυτό ιδιωτική πληροφορία και η συνάρτηση αποτίμησης κάθε παίκτη j είναι $h_j(x) = \min\{x v_j, w_j v_j\}$. Συνεχίζει ο μηχανισμός του (i) να είναι φιλαλήθης για αυτή την παραλλαγή του προβλήματος; Αν όχι, να διατυπώσετε μηχανισμό που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, είναι φιλαλήθης και individually rational για αυτή την παραλλαγή.

Αναφορές

[1] M. Mitzenmacher and E. Upfal. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, 2005.

[2] D.P. Williamson and D.B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press, 2010.