Ψηφιακές Υπογραφές

Μοντέλα Ασφάλειας - Κατασκευές - Επιθέσεις

Παναγιώτης Γροντάς

02/03/2023

ΕΜΠ - Advanced Crypto (2022-2023)

Ψηφιακές Υπογραφές

Ορισμός Ψηφιακής Υπογραφής

Μια τριάδα αλγορίθμων $\mathsf{DS} = (\mathsf{KGen}, \mathsf{Sign}, \mathsf{Vf})$:

- Πιθανοτικός αλγόριθμος KGen που παράγει κλειδιά υπογραφής και επαλήθευσης.

  $$(\mathsf{sk},\mathsf{vk}) := \mathsf{DS.KGen}(1^\lambda)$$

  Συνήθως χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με αλγόριθμο Pgen ο οποίος παράγει τις κρυπτογραφικές παραμέτρους που χρησιμοποιούνται. Δηλ:

  $$\mathsf{prms}= (\mathbb{G}, H) := \mathsf{DS.Pgen}(1^\lambda)$$
  $$(\mathsf{sk},\mathsf{vk}) := \mathsf{DS.KGen}(\mathsf{prms})$$

- Αλγόριθμος υπογραφής μηνύματος m με κλειδί υπογραφής sk. Μπορεί να είναι πιθανοτικός.

  $\sigma := \mathsf{DS.Sign}(\mathsf{sk}, m)$

- Αλγόριθμος επαλήθευσης υπογραφής σ με κλειδί vk στο μήνυμα m. Ντετερμινιστικός.

  $\mathsf{DS.Vf}(\mathsf{vk}, \sigma, m) \in \{0, 1\}$

Μέσα Επιθέσεων

- No Message Attack: Ο αντίπαλος $\mathcal{A}$ διαθέτει μόνο το vk (EUF-NMA)
- Known Message Attack: Ο αντίπαλος $\mathcal{A}$ διαθέτει το vk και ζεύγη μηνυμάτων υπογραφών (m_i, σ_i) που είναι έγκυρες δηλ.

  $\forall i : \mathrm{Vf}(\mathrm{vk}, \sigma_i, m_i) = 1$
  Παραλλαγές:
  - Plain: $\mathcal{A}$ δεν διαλέγει τα μηνύματα
  - Generic: $\mathcal{A}$ διαλέγει μηνύματα μία φορά πριν δει το vk (chosen message attack)
  - Oriented: $\mathcal{A}$ διαλέγει μηνύματα μία φορά αφού δει το vk (chosen message attack)
  - Adaptive: $\mathcal{A}$ διαλέγει μηνύματα αφού δει το vk (chosen message attack) λαμβάνοντας υπ'οψιν και προηγούμενα ζεύγη μηνυμάτων υπογραφών

Στόχοι Επιθέσεων

- Πλαστοπροσωπία: Ανάκτηση κλειδιού υπογραφής sk
- Πλαστογράφηση: Δημιουργία έγκυρης υπογραφής χωρίς sk
  - Universal: για οποιοδήποτε μήνυμα
  - Existential: για κάποιο μήνυμα (που μπορεί να μην έχει νόημα)
    EUF-CMA

Ασφάλεια: Αδυναμία επιτυχίας επίθεσης **EUF-CMA** για οποιοδήποτε υπολογιστικά περιορισμένο (PPT) αντίπαλο

Oracles

- $\sigma := \mathcal{SO}(m)$ Εκφράζει το ότι ο $\mathcal{A}$ μπορεί να αποκτά υπογραφές σε μηνύματα της επιλογής του.
  Υλοποιείται (στο παίγνιο) από τον $\mathcal{C}$ με χρήση του sk.
- $h := \mathcal{RO}(m)$ Εκφράζει το ότι το σχήμα υπογραφών εφαρμόζεται σε $m \in \{0,1\}^*$.
  Θεωρητικά υλοποιείται με ομοιόμορφη επιλογή, διατηρώντας τις ιδιότητες της συνάρτησης (ίδιο input - ίδιο output).
  Πρακτικά υλοποιείται με hash function H.
  Υπόθεση random oracle: Ισχυρότερη υπόθεση από (δηλ. implies) collision resistance, first, second preimage resistance

Παίγνια Ασφάλειας

Algorithm 1: $\text{Forge}_{\mathcal{A},\Pi}$

Input : λ

Output: $\{0,1\}$

$(\text{sk}, \text{vk}, \text{prms}) := \Pi.\text{KGen}(1^\lambda)$

$(m, \sigma) := \mathcal{A}^{\mathcal{SO},\mathcal{RO}}(\text{vk})$

if $\Pi.\text{Vf}(\text{vk}, \sigma, m) = 1$ **then**

  return 1

else

  return 0

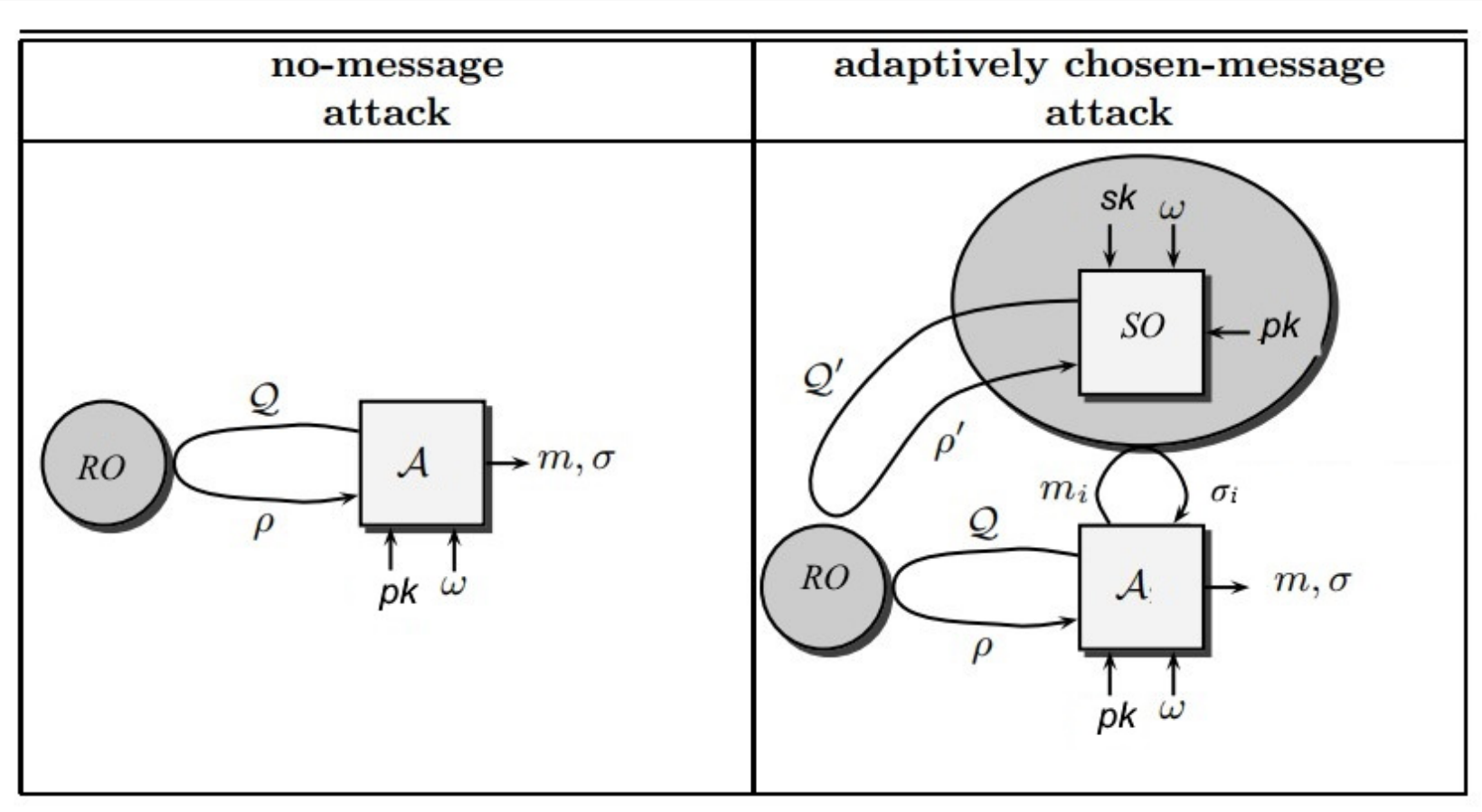
end

Definition

Ένα σχήμα υπογραφών Π είναι **EUF-CMA unforgeable** αν για κάθε PPT αντίπαλο $\mathcal{A}$

$$\Pr[\text{Forge}_{\Pi,\mathcal{A}}(1^\lambda) = 1] \leq \text{negl}(\lambda)$$

Οι επιθέσεις σχηματικά

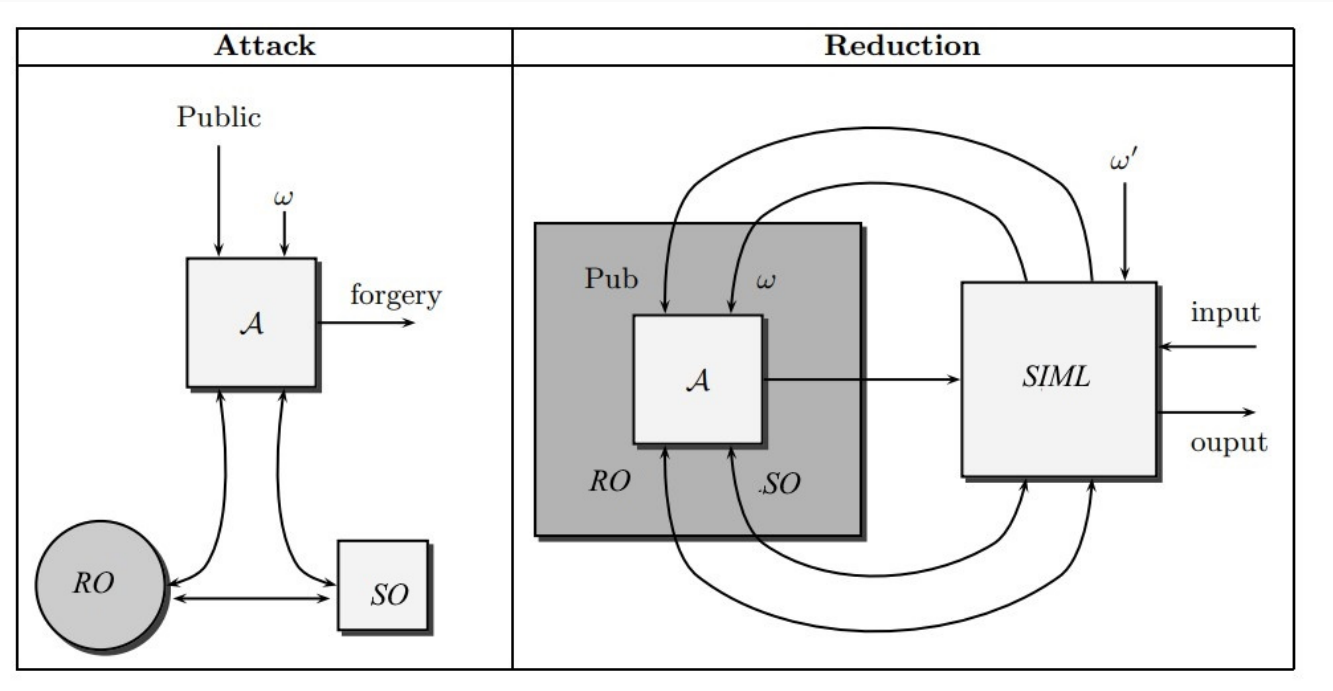


Αποδείξεις ασφαλείας

Αναγωγή της ασφάλειας σχήματος υπογραφών σε δύσκολο υπολογιστικά πρόβλημα.

Απόδειξη: Αν το σχήμα υπογραφής δεν είναι ασφαλές σύμφωνα με τον τυπικό ορισμό (παίγνιο), τότε χρησιμοποιώντας την πλαστογράφηση μπορώ να λύσω το δύσκολο πρόβλημα.

Γενική μορφή αποδείξων



Ψηφιακές Υπογραφές RSA

RSA - FDH (Full Domain Hash) i

Δημιουργία Κλειδιών: $\mathsf{KGen}(1^\lambda) = (d, (e, n))$

- $n := p \cdot q$, p, q πρώτοι αριθμοί $\frac{\lambda}{2}$ bits
- Επιλογή e ώστε $gcd(e, \phi(n)) = 1$
- $d := e^{-1} \pmod{\phi(n)}$ με EGCD
- Χρήση δημόσια διαθέσιμης τυχαίας συνάρτησης $\mathsf{H} : \{0,1\}^* \to \mathbb{Z}_n^*$

Πρακτικά: $\mathsf{FDH}(m) = \mathsf{H}(m||0)||\mathsf{H}(m||1) \cdots [: \lambda]$ $(\lambda bits)$

ή μπορεί να υποστηρίζεται natively από την H

RSA - FDH (Full Domain Hash) ii

Υπογραφή

- Υπολογισμός $\mathsf{H}(m)$
- $\mathsf{Sign}(d, m) \triangleq \mathsf{H}(m)^d \bmod n$

Επαλήθευση

- Υπολογισμός $\mathsf{H}(m)$
- $\mathsf{Vf}((e, n), m, \sigma) \triangleq \quad \sigma^e = \mathsf{H}(m) \pmod{n}$

Ορθότητα

$\mathsf{Vf}((e, n), m, \mathsf{H}(m)^d)$ $(\mathsf{H}(m)^d)^e = \mathsf{H}(m) \pmod{n}$

Υλοποίηση: συνάρτηση σύνοψης με δυσκολία εύρεσης συγκρούσεων

Πλεονέκτημα: Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υπογραφή τυχαίων συμβολοσειρών και όχι μόνο στοιχείων του $\mathbb{Z}_n^*$

RSA - FDH (Full Domain Hash) iii

- Επίθεση χωρίς μήνυμα
  - Επιλογή τυχαίου $\sigma \in \mathbb{Z}_n^*$
  - Η ‘κρυπτογράφηση‘ δίνει τη σύνοψη $h = \sigma^e \pmod{n}$ - όχι το μήνυμα
  - Για το μήνυμα πρέπει να βρεθεί m : $\mathrm{H}(m) = h$
  - Δυσκολία αντιστροφής

RSA - FDH (Full Domain Hash) iv

- Επίθεση επιλεγμένων μηνυμάτων
  - Ο $\mathcal{A}$ έχει στη διάθεση του δημόσιο κλειδί (e, n) και θέλει να πλαστογραφήσει υπογραφή για $m \in \mathbb{Z}_n^*$
  - Ο $\mathcal{A}$ χρησιμοποιώντας το μαντείο αποκτά τις υπογραφές 2 μηνυμάτων $Q = \{(m_1, \sigma_1), (\frac{m}{m_1}, \sigma_2)\}$ με $m_1 \in_R$
  - Υπολογισμός $\sigma = \sigma_1\sigma_2 = \mathrm{H}(m_1)\mathrm{H}(\frac{m}{m_1})$
  - Δεν ισχύουν οι ομομορφικές ιδιότητες.

Απόδειξη Ασφάλειας RSA-FDH

Θεώρημα

Αν το πρόβλημα RSA είναι δύσκολο, τότε οι υπογραφές RSA-FDH παρέχουν ασφάλεια έναντι υπαρξιακής πλαστογράφησης με επιλεγμένα μηνύματα **EUF-CMA** στο μοντέλο του τυχαίου μαντείου.

Θα αποδείξουμε το παρακάτω:

Θεώρημα

Αν υπάρχει αντίπαλος $\mathcal{A}$ που παράγει πλαστογράφηση στο RSA-FDH με πλεονέκτημα τουλάχιστον $\mathsf{Adv}_{A}^{\mathsf{forge}}(\lambda)$ μετά από $Q_{\mathcal{RO}}$ ερωτήσεις στο τυχαίο μαντείο, τότε υπάρχει αντίπαλος $\mathcal{B}$ που λύνει το πρόβλημα RSA με πιθανότητα $\mathsf{Adv}_{\mathcal{B}}^{\mathsf{rsa}}(\lambda) \geq \frac{\mathsf{Adv}_{\mathcal{A}}^{\mathsf{forge}}(\lambda)}{Q_{\mathcal{RO}}}$.

Απόδειξη Ασφάλειας Hashed RSA: Κατασκευή $\mathcal{B}$

- Ο $\mathcal{A}$ μπορεί να κατασκευάσει πλαστογράφηση υπογραφής
- Κατασκευή $\mathcal{B}$ που με χρήση του $\mathcal{A}$ και ενός τυχαίου μαντείου μπορεί να αντιστρέψει το RSA
- Είσοδος $\mathcal{B}$
  - Δημόσιο κλειδί (e, n)
  - Ομοιόμορφα επιλεγμένο $y \in \mathbb{Z}_n^*$
- Έξοδος $\mathcal{B}$
  - $x = y^{e^{-1}}$

Απόδειξη Ασφάλειας Hashed RSA
Επίθεση χωρίς μήνυμα i

Υπόθεση

Για την πλαστογράφηση (m^*, σ^*) έχει προηγουμένως ερωτηθεί στο μαντείο το $\mathsf{H}(m^*)$

Συνέπεια

Εφόσον η πλαστογράφηση είναι έγκυρη υπογραφή πρέπει $\sigma^{*e} = \mathsf{H}(m^*)$ Άρα $\sigma^* = \mathsf{H}(m^*)^{e^{-1}}$

Πλήθος ερωτήσεων

Ο $\mathcal{B}$ δεν γνωρίζει ακριβώς το $Q_{\mathcal{RO}}$, αλλά δεν έχει σημασία αφού $\mathcal{A}$ είναι PPT. Άρα $Q_{\mathcal{RO}} \leq \mathsf{poly}(\lambda)$.

Απόδειξη Ασφάλειας Hashed RSA
Επίθεση χωρίς μήνυμα ii

- Ο $\mathcal{B}$ προωθεί το (e, n) στον $\mathcal{A}$
- Ο $\mathcal{B}$ επιλέγει $j \in_R [Q_{\mathcal{RO}}]$
- Ο $\mathcal{A}$ όταν ρωτάει το μαντείο H για μηνύματα $\{m_i\}_{i=1}^{Q_{\mathcal{RO}}}$ λαμβάνει τις απαντήσεις $\{\mathrm{H}(m_i)\}_{i=1}^{Q_{\mathcal{RO}}} \in_r$
- Ο $\mathcal{B}$ *ελπίζει* ότι στο ερώτημα j θα γίνει η πλαστογράφηση
- Αν $i = j$, ο $\mathcal{B}$ αντικαθιστά την απάντηση $\mathrm{H}(m_j^*)$ με το y
- Αν έχει δίκιο, τότε ο $\mathcal{A}$ εξάγει την πλαστογραφία (m_j^*, σ^*) με πιθανότητα p_F
- Δηλαδή: $\sigma^{*e} = y \Rightarrow \sigma^* = y^{e^{-1}}$
- Ο $\mathcal{B}$ προωθεί το σ^* στην έξοδο
- Ο $\mathcal{B}$ αντέστρεψε το RSA με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{\mathrm{Adv}_{\mathcal{A}}^{\mathsf{forge}}(\lambda)}{Q_{\mathcal{RO}}}$

Απόδειξη Ασφάλειας Hashed RSA
Επίθεση επιλεγμένου μηνύματος i

Σενάριο

- $\mathcal{A}$ ζητάει συνόψεις και υπογραφές από τον $\mathcal{B}$
- Συνόψεις: το τυχαίο μαντείο - προσομοίωση
- Υπογραφές: Πρέπει να τις απαντήσει ο $\mathcal{B}$
- δηλ. να υπολογίσει το $\mathrm{H}(m)^d$ χωρίς το ιδιωτικό κλειδί...

Απόδειξη Ασφάλειας Hashed RSA
Επίθεση επιλεγμένου μηνύματος ii

Λύση

Ερώτηση $\mathcal{A}^{\mathcal{RO}}(m)$:

Επιλογή $\sigma \leftarrow\!\!\$\ \mathbb{Z}_n^*$,

υπολογισμός σ^e και επιστροφή αντί $\mathsf{H}(m)$,

Αποθήκευση σ, σ^e, m για μετά

Ερώτηση $\mathcal{A}^{\mathcal{SO}}(m)$:

Επιστροφή σ από την αντίστοιχη απάντηση για $\mathsf{H}(m)$.

Τετριμμένη επαλήθευση $\sigma^e = \mathsf{H}(m) = \sigma^e$

Απόδειξη Ασφάλειας Hashed RSA
Επίθεση επιλεγμένου μηνύματος iii

- Ο $\mathcal{B}$ προωθεί το (e, n) στον $\mathcal{A}$
- Ο $\mathcal{B}$ επιλέγει $j \in_R [Q_{\mathcal{RO}}]$
- Ο $\mathcal{A}$ κάνει $Q_{\mathcal{RO}} = O(\text{poly}(\lambda))$ ερωτήσεις στο μαντείο για μηνύματα $\{m_i\}_{i=1}^{Q_{\mathcal{RO}}}$
- Κάθε ερώτηση του μαντείου H απαντάται από τον $\mathcal{B}$ως εξής:
  - Επιλέγει $\sigma_i \leftarrow\$ \mathbb{Z}_n^*$
  - Υπολογίζει $\sigma_i^e = y_i$ και θέτει $\text{H}(m_i) = y_i$
  - Επιστρέφει y_i
  - Αποθηκεύει τις τριάδες $\mathcal{T} = (y_i, \sigma_i, m_i)$
- Ο $\mathcal{A}$ ζητάει υπογραφές από το μαντείο υπογραφών
  - Για κάθε σύνοψη y_i γίνεται αναζήτηση στον $\mathcal{T}$ για την τριάδα που περιέχει το y και επιστρέφεται το σ_i
  - Οι υπογραφές είναι έγκυρες αφού $\sigma_i^e = y_i$
- Ο $\mathcal{B}$ απαντάει το ερώτημα j στο H με y

Απόδειξη Ασφάλειας Hashed RSA
Επίθεση επιλεγμένου μηνύματος iv

- Για το συγκεκριμένο δεν θα ζητηθεί υπογραφή, αλλά το σ^* θα παραχθεί από τον $\mathcal{A}$ (πλαστογράφηση)
- Αφού πλαστογράφηση = έγκυρη υπογραφή θα ισχύει $\sigma^{*e} = y$, δηλαδή $\sigma^* = y^{e^{-1}}$
- Άρα ο $\mathcal{B}$ πέτυχε το στόχο του και αντέστρεψε το y
- Πλεονέκτημα $\mathcal{A}$ $\mathsf{Adv}^{\mathsf{forge}}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ και πλεονέκτημα $\mathcal{B}$ $\mathsf{Adv}^{\mathsf{rsa}}_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \frac{\mathsf{Adv}^{\mathsf{forge}}_{A}(\lambda)}{Q_{\mathcal{RO}}}$

Απόδειξη Ασφάλειας Hashed RSA
Επίθεση επιλεγμένου μηνύματος v

Ασυμπτωτικά, $\mathsf{Adv}^{\mathsf{rsa}}_{\mathcal{B}}(\lambda) \leq \mathsf{negl}(\lambda)$ και αφού $Q_{\mathcal{RO}} \leq \mathsf{poly}(\lambda)$ τότε και $\mathsf{Adv}^{\mathsf{forge}}_{A}(\lambda) \leq \mathsf{Adv}^{\mathsf{rsa}}_{\mathcal{B}}(\lambda) \cdot Q_{\mathcal{RO}} \leq \mathsf{negl}(\lambda)$.

Παρατήρηση

Πρακτικά υπάρχει 'απώλεια' ασφάλειας $Q_{\mathcal{RO}}$.

Π.χ.: Αν $\mathsf{Adv}^{\mathsf{rsa}}_{\mathcal{B}}(\lambda) = 2^{-60}$ και $Q_{\mathcal{RO}} = 2^{50}$ τότε $\mathsf{Adv}^{\mathsf{forge}}_{A}(\lambda) = 2^{-10}$.

Πρωτόκολλα Ταυτοποίησης

Ορισμός i

Το πρόβλημα της ταυτοποίησης

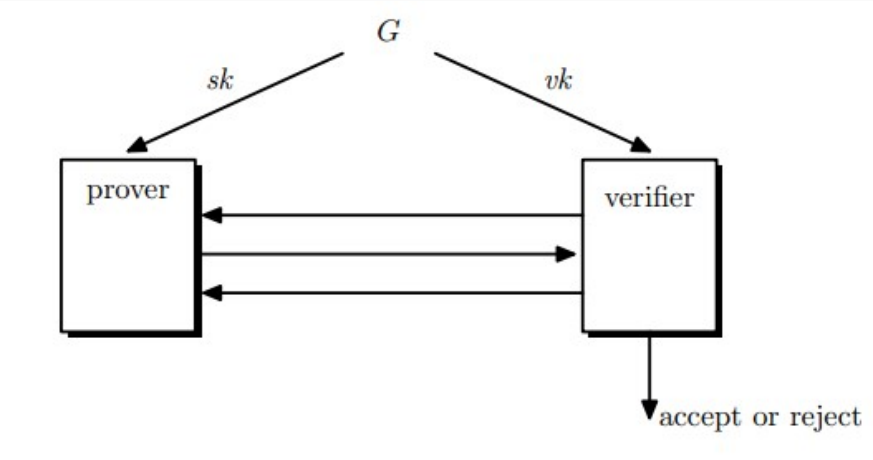
Μια οντότητα (P) θέλει να αποδείξει σε κάποια άλλη (V) ότι είναι αυτή που ισχυρίζεται ώστε να αποκτήσει δικαιώματα πρόσβασης σε κάποιους πόρους.

- Φυσική πρόσβαση σε αντικείμενο
- Πρόσβαση σε τοπικό υπολογιστή
- Πρόσβαση σε απομακρυσμένο υπολογιστή

Ορισμός ii

Ένα πρωτόκολλο ταυτοποίησης είναι μια τριάδα $\mathsf{ID} = (\mathsf{KGen}, \mathsf{P}, \mathsf{V})$:

- $(\mathsf{vk}, \mathsf{sk}) = \mathsf{KGen}(1^\lambda)$
- $\langle \mathsf{P}(\mathsf{sk}, \mathsf{vk}), \mathsf{V}(\mathsf{vk}) \rangle$ είναι ένα πρωτόκολλο μεταξύ των αλγορίθμων P, V τέτοιο ώστε μετά την εκτέλεσή του $\mathsf{V}(\mathsf{vk}) \in \{0, 1\}$



Πληρότητα: Αν ο P εκτελεστεί με είσοδο το sk του $(\mathsf{sk}, \mathsf{vk}) \leftarrow \mathsf{KGen}(1^\lambda)$ τότε $\mathsf{V}(\mathsf{vk}) = 1$

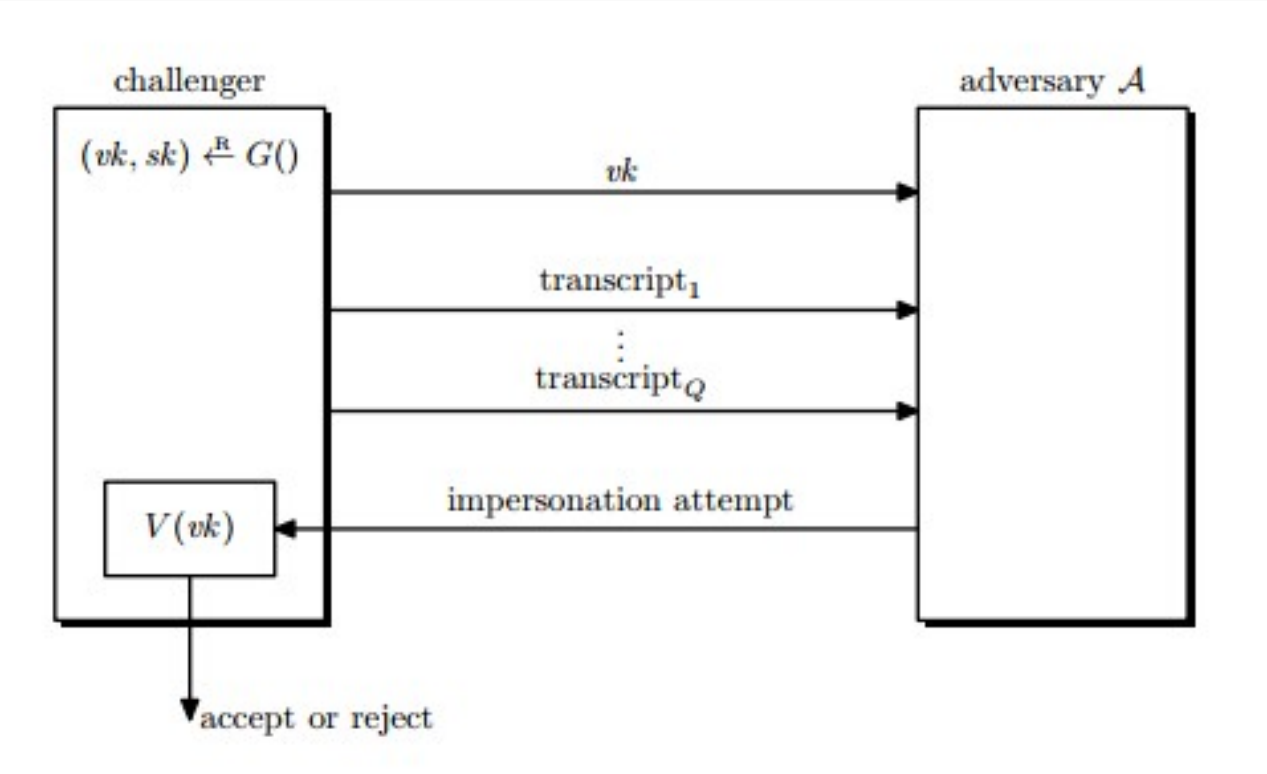
Μοντέλο Ασφάλειας i

- **Direct (Impersonation) Attacks**: Ο $\mathcal{A}$ αλληλεπιδρά με τον V χωρίς το sk, δηλ.
  - Τοπική πρόσβαση στον verifier
  - Δεν υπάρχει δυνατότητα eavesdropping
  - Το τελευταίο στάδιο οποιασδήποτε επίθεσης

  $\mathsf{ID}_{\mathsf{DA}} = \langle \mathcal{A}(\mathsf{vk}), \mathsf{V}(\mathsf{vk}) \rangle$
- **Eavesdropping Attacks**: Ο $\mathcal{A}$ μπορεί να ζητήσει ένα σύνολο από Q πραγματικά transcripts $T = \langle \mathsf{P}(\mathsf{sk}, \mathsf{vk}), \mathsf{V}(\mathsf{vk}) \rangle_{i=1}^{Q}$ πριν προβεί σε direct attack.
  - Παρακολούθηση δικτύου

  $\mathsf{ID}_{\mathsf{EVE}} = \langle \mathcal{A}(T, \mathsf{vk}), \mathsf{V}(\mathsf{vk}) \rangle$

Μοντέλο Ασφάλειας ii

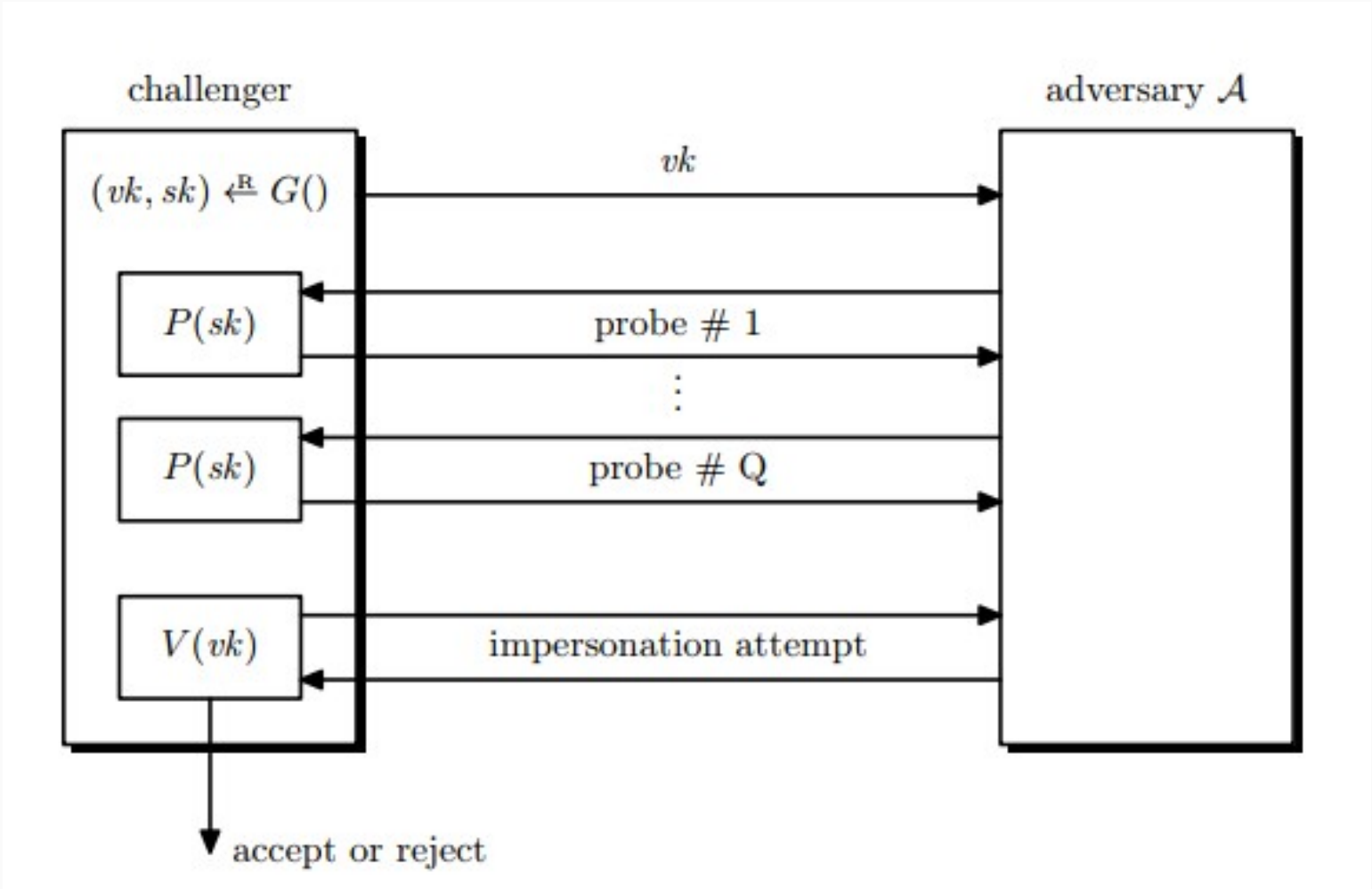


Μοντέλο Ασφάλειας iii

- r-**Impersonation Attacks:** Ο αντίπαλος έχει δυνατότητα eavesdropping
  Αλλά, κατά τη διάρκεια του direct attack, ο $\mathcal{A}$ μπορεί να αλληλεπιδράσει ταυτόχρονα με r verifiers.
  Κερδίζει αν τουλάχιστον ένας από αυτούς δεχθεί.
  $\mathsf{ID}_{\mathsf{r-EVE}} = \langle \mathcal{A}(T, \mathsf{vk}), \mathsf{V}^r(\mathsf{vk}) \rangle$
- **Active Attacks** Ο $\mathcal{A}$ αλληλεπιδρά με τον P στη θέση του verifier χωρίς κατ'ανάγκη να ακολουθεί το πρωτόκολλο, πριν προβεί σε direct attack.
  - Χρήση fake verifier
  - Phishing attacks

  $\mathsf{ID}_{\mathsf{ACT}} = \langle \mathsf{P}(\mathsf{sk}), \mathcal{A}(\mathsf{vk}) \rangle$

Μοντέλο Ασφάλειας iv



Μοντέλο Ασφάλειας v

- **Concurrent (Active) Attacks** Ο αντίπαλος μπορεί να δημιουργήσει πολλά ταυτόχρονα sessions με τον prover παριστάνοντας τον verifier και να χρησιμοποιήσει τα μηνυμάτά τους ώστε στη συνέχεια να κάνει direct attack.
  Ο $\mathcal{A}$ αλληλεπιδρά με l prover - clones.
  Κάθε P clone διαθέτει το ίδιο sk, αλλά έχει ξεχωριστό random tape και ξεχωριστή κατάσταση.
  $\mathrm{ID}_{\mathrm{CC}} = \langle \mathrm{P}^l(\mathrm{sk}), \mathcal{A}(\mathrm{vk}) \rangle$

Μοντέλο Ασφάλειας vi

Λήμμα

Έστω πρωτόκολλο ταυτοποίησης ID. Για κάθε αντίπαλο $\mathcal{A}$ στο μοντέλο $\mathrm{ID}_{\mathrm{r-EVE}}$ υπάρχει αντίπαλος $\mathcal{B}$ στο $\mathrm{ID}_{\mathrm{EVE}}$ ώστε:

$$\mathrm{Adv}^{\mathrm{id_{eve}}}_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \frac{1}{r}\mathrm{Adv}^{\mathrm{id_{r-eve}}}_{\mathcal{A},r}(\lambda)$$

Απόδειξη

Guessing argument

Ο $\mathcal{B}$ μαντεύει για ποιον (j) από τους verifiers του $\mathrm{ID}_{\mathrm{r-EVE}}$ κερδίζει ο $\mathcal{A}$.

Για αυτόν παίζει το παιχνίδι $\mathrm{ID}_{\mathrm{EVE}}$ ως challenger, ενώ προσομοιώνει τους υπόλοιπους.

Κερδίζει αν μάντεψε σωστά, δηλαδή αν ο $\mathcal{A}$ κάνει επιτυχή direct attack στον V_j.

Κατασκευές

Το πρωτόκολλο του Schnorr [Sch89]

- $(q, g, \mathbb{G}) := \mathsf{Pgen}(1^\lambda)$ με $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ ομάδα τάξης q
- $(x, Y) \leftarrow \mathsf{KGen}(\mathsf{prms})$ με $x \leftarrow\!\!\$\ \mathbb{Z}_q, Y = g^x$
- $T \leftarrow \mathsf{P}(Y, x)$ με $t \leftarrow\!\!\$\ \mathbb{Z}_q, T := g^t$
- $c \leftarrow \mathsf{V}(Y, T)$ με $c \leftarrow\!\!\$\ \mathbb{Z}_q$
- $s \leftarrow \mathsf{P}(x, (T, c))$ με $s = t + cx \bmod q$
- $\mathsf{V}(Y, (T, c, s)) = 1 \Leftrightarrow g^s = TY^c$

Αρχική έκδοση: $c \in \{0, 1\}^k \subseteq \mathbb{Z}_q$

Ασφάλεια Schnorr σε direct attacks i

Θεώρημα

Αν το DLP είναι δύσκολο στην $\mathbb{G}$ τότε το πρωτόκολλο ταυτοποίησης του Schnorr παρέχει ασφάλεια σε direct attacks.

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{dlp}}_{\mathcal{B}}(\lambda) \geq \mathsf{Adv}^{\mathsf{id_{da}}}_{\mathcal{A}}(\lambda)^2 - \frac{\mathsf{Adv}^{\mathsf{id_{da}}}_{\mathcal{A}}(\lambda)}{q}$$

ή ισοδύναμα:

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{id_{da}}}_{\mathcal{A}}(\lambda) \leq \frac{1}{q} + \sqrt{\mathsf{Adv}^{\mathsf{dlp}}_{\mathcal{B}}(\lambda)}$$

Για ευκολία θέτουμε:
$\epsilon = \mathsf{Adv}^{\mathsf{id_{da}}}_{\mathcal{A}}(\lambda)$ και $\epsilon' = \mathsf{Adv}^{\mathsf{dlp}}_{\mathcal{B}}(\lambda)$

Ασφάλεια Schnorr σε direct attacks ii

Tightness

Πλαστοπροσωπία με πιθανότητα ϵ

Επίλυση διακριτού λογάριθμου με πιθανότητα ϵ^2

Βασική ιδέα απόδειξης

Αν ο $\mathcal{A}$ μπορεί να απαντήσει για $Y = g^x$ στο $\mathsf{ID}_{\mathsf{DA}}$ για ένα challenge c_1 με πιθανότητα ϵ, θα μπορεί να απαντήσει για δύο challenges $c_1, c_2 (c_1 \neq c_2)$ με πιθανότητα ϵ^2.

Μετά την πρώτη επιτυχία ο $\mathcal{B}$ κάνει rewind τον $\mathcal{A}$ στο σημείο πριν την παραγωγή του challenge.

Ασφάλεια Schnorr σε direct attacks iii

Δύο accepting transcripts $(T, c_1, s_1 = t + c_1 x)$ και $(T, c_2, s_2 = t + c_2 x)$

Δηλαδή: $T \cdot Y^{c_1} = g^{s_1}$ και $T \cdot Y^{c_2} = g^{s_2}$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
g^{s_1} Y^{-c_1} = g^{s_2} Y^{-c_2} &\Rightarrow \\
g^{s_1 - s_2} = Y^{c_1 - c_2} &\Rightarrow \\
s_1 - s_2 = x(c_1 - c_2) &\Rightarrow \\
x = \frac{s_1 - s_2}{c_1 - c_2}
\end{aligned}
$$

Rewinding/Splitting/Resetting/Forking Lemma [PS00, BP02]

Rewinding Lemma

Έστω πεπερασμένα, μη κενά σύνολα S, T με $|T| = n$ και $f : S \times T \to \{0, 1\}$.

Έστω τυχαία μεταβλητή X με τιμές από το S και τυχαίες μεταβλητές Y, Y' που παίρνουν τιμές στο T ομοιόμορφα οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Αν $\mathsf{Pr}[f(X, Y) = 1] = \epsilon$ τότε ισχύει

$$\mathsf{Pr}[f(X, Y) = 1 \wedge \ f(X, Y') = 1 \wedge \ Y \neq Y'] \geq \epsilon^2 - \frac{\epsilon}{n}$$

Αντιστοιχία:

$S = \mathbb{G}$

$Y = \mathbb{Z}_q^2 \quad (c, s) = y \in Y$

και f είναι η επαλήθευση από τον V

Απόδειξη Splitting Lemma i

Θεωρούμε $g(s) = \mathsf{Pr}[f(s, Y) = 1]$ για $s \in S$. Ισχύει $\mathbb{E}[g(X)] = \epsilon$ γιατί:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X)] &= \sum_{s \in S} g(s) \, \mathsf{Pr}[X = s] = \\
&= \sum_{s \in S} \mathsf{Pr}[f(s, Y) = 1] \, \mathsf{Pr}[X = s] \\
&= \sum_{s \in S} \mathsf{Pr}[f(s, Y) = 1 \wedge X = s] \quad \text{Ανεξαρτησία} \\
&= \mathsf{Pr}[f(X, Y) = 1] \quad \text{Ολική Πιθανότητα} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Απόδειξη Splitting Lemma ii

Έστω το event

$$G_s = f(s, Y) = 1 \wedge \ f(s, Y') = 1 \wedge \ Y \neq Y'$$

και

$$n_s = |\{t \in T : f(s, t) = 1\}|$$

Τότε $g(s) = \frac{n_s}{n}$

$$\mathsf{Pr}[G_s] \geq \frac{n_s}{n} \frac{n_s - 1}{n} = (\frac{n_s}{n})^2 - \frac{n_s}{n^2} = g(s)^2 - \frac{g(s)}{n}$$

Απόδειξη Splitting Lemma iii

Έστω το event $G : f(X,Y) = 1 \wedge \ f(X,Y') = 1 \wedge \ Y \neq Y'$

$$
\begin{aligned}
\Pr[G] &= \sum_{s \in S} \Pr[G \wedge X = s] \\
&= \sum_{s \in S} \Pr[G_s] \Pr[X = s] \\
&\geq \sum_{s \in S} (g(s)^2 - \frac{g(s)}{n}) \Pr[X = s] \\
&= \mathbb{E}\left[g(X)^2\right] - \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{n} \\
&\geq \mathbb{E}[g(X)]^2 - \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{n} \qquad \text{Jensen's inequality} \\
&= \epsilon^2 - \frac{\epsilon}{n}
\end{aligned}
$$

Ασφάλεια σε direct attacks (απόδειξη)

Για $\mathcal{A}$ που επιτυγχάνει στο $\mathsf{ID}_{\mathsf{DA}}$ με $\mathsf{vk} = Y \in \mathbb{G}, \mathsf{sk} = x \in \mathbb{Z}_q$ κατασκευάζουμε $\mathcal{B}$ που λύνει το DLP στην $\mathbb{G}$ για το Y.

Ο $\mathcal{B}$ θα υπολογίσει το μέσω δύο αποδεκτών συζητήσεων $(T, c_1, s_1 = t + c_1 x)$ και $(T, c_2, s_2 = t + c_2 x)$ με $c_1 \neq c_2$.

Τα c_1, c_2 επιλέγονται τυχαία από τον $\mathcal{B}$ (που παίζει το ρόλο του V).

Από Rewinding Lemma $\mathcal{B}$ επιτυγχάνει με πλεονέκτημα τουλάχιστον $\epsilon^2 - \frac{\epsilon}{q}$ αν ο $\mathcal{A}$ καταφέρει impersonation με πλεονέκτημα $\epsilon \geq \frac{1}{q}$.

$$\epsilon' \geq \epsilon^2 - \frac{\epsilon}{q} = \epsilon^2 - 2\frac{\epsilon}{q} + \frac{\epsilon}{q} \geq \epsilon^2 - 2\frac{\epsilon}{q} + \frac{1}{q^2} = (\epsilon - \frac{1}{q})^2$$

Άρα

$$\epsilon' \geq (\epsilon - \frac{1}{q})^2 \Rightarrow \epsilon \leq \sqrt{\epsilon'} + \frac{1}{q}$$

Υπενθύμιση: Πρωτόκολλα HVZK

HVZK

Ένα πρωτόκολλο μεταξύ ενός P και ενός V είναι Honest Verifier Zero Knowledge αν υπάρχει αλγόριθμος PPT Sim τέτοιος ώστε για κάθε $(\mathsf{vk}, \mathsf{sk}) \leftarrow \mathsf{KGen}(1^\lambda)$ οι κατανομές πιθανότητας των transcripts μεταξύ $\mathsf{P}(\mathsf{sk}, \mathsf{vk}), \mathsf{V}(\mathsf{vk})$ είναι ίδιες με αυτές μετάξύ $\mathsf{Sim}(\mathsf{vk}), \mathsf{V}(\mathsf{vk})$

Το πρωτόκολλο Schnorr είναι HVZK

Ο Sim παράγει τα μήνυμα με αντίστροφη σειρά

Τα transcripts

$\mathcal{T}_1 = \langle \mathsf{P}(Y, x), \mathsf{V}(Y) \rangle = (T = g^t, c, s = t + cx)$ και

$\mathcal{T}_2 = \langle \mathsf{Sim}(Y), \mathsf{V}(Y) \rangle = (T = g^s Y^{-c}, c, s \rangle$

γίνονται αποδεκτά από τον V και έχουν ταυτόσημες κατανομές.

Eavesdropping attacks και HVZK i

Θεώρημα

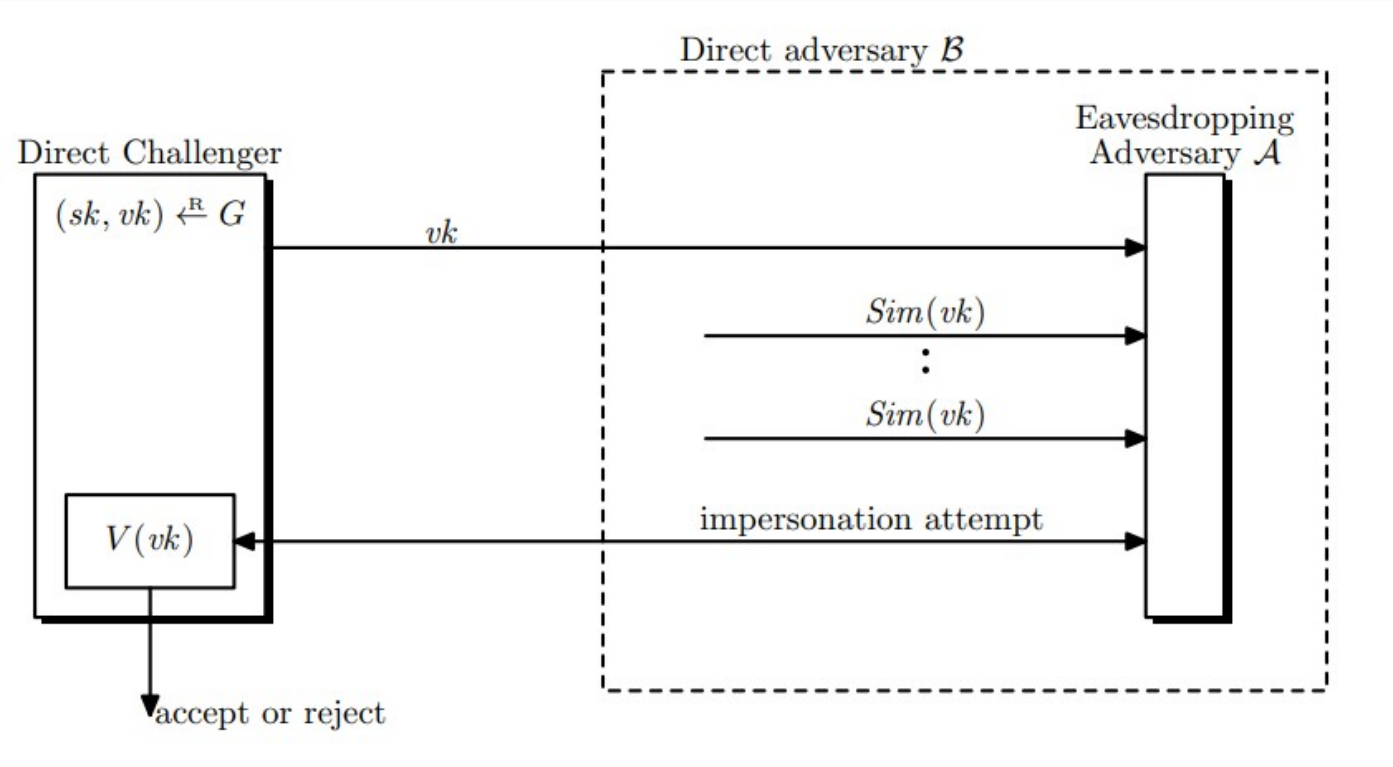
Αν το πρωτόκολλο ταυτοποίησης ID είναι HVZK, τότε:

$$\mathrm{Adv}^{\mathrm{id}_{\mathrm{eve}}}_{\mathcal{B},\mathrm{ID}}(\lambda) = \mathrm{Adv}^{\mathrm{id}_{\mathrm{da}}}_{\mathcal{A},\mathrm{ID}}(\lambda)$$

Απόδειξη

Στο Eavesdropping παίγνιο ID_{EVE} ο $\mathcal{B}$ παράγει τα transcripts μόνος του αντί να τα πάρει από τον challenger του direct παίγνιου $\mathrm{ID}_{\mathrm{DA}}$.

Eavesdropping attacks και HVZK ii



Υπογραφές από HVZK i

Fiat-Shamir Heuristic

Αντικατάσταση verifier από random oracle $\mathsf{H} : \boldsymbol{M} \times \mathbb{G}^2 \to \mathbb{Z}_q$

Υπογραφές Schnorr

- $(q, g, \mathbb{G}) := \mathsf{Pgen}(1^\lambda)$ με $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ ομάδα τάξης q και $\mathsf{H} : \boldsymbol{M} \times \mathbb{G}^2 \to \mathbb{Z}_q$
- $(x, Y) := \mathsf{KGen}(\mathsf{prms})$ με $x \leftarrow\!\!\$\ \mathbb{Z}_q, Y = g^x$
- $\mathsf{Sign}(x, \boldsymbol{m}) = (T, s)$ με:
  - $T := g^t$ και $t \leftarrow\!\!\$\ \mathbb{Z}_q$
  - $s := t + cx \bmod q$ με $c := \mathsf{H}(m, T, Y)$
- $\mathsf{Vf}(Y, (T, s), m) = 1 \Leftrightarrow g^s = TY^{\mathsf{H}(m,T,Y)}$

Υπογραφές από HVZK ii

Υπογραφές Schnorr - Εναλλακτική Υλοποίηση

- $(q, g, \mathbb{G}) := \mathsf{Pgen}(1^\lambda)$ με $\mathbb{G} = \langle g \rangle$ ομάδα τάξης q και $\mathsf{H} : M \times \mathbb{G}^2 \to \mathbb{Z}_q$
- $(x, Y) := \mathsf{KGen}(\mathsf{prms})$ με $x \leftarrow\!\$\, \mathbb{Z}_q, Y = g^x$
- $\mathsf{Sign}(x, m) = (c, s)$ με:
  - $c := \mathsf{H}(m, T, Y)$ και $T := g^t$ με $t \leftarrow\!\$\, \mathbb{Z}_q$
  - $s := t + cx \bmod q$
- $\mathsf{Vf}(Y, (T, s), m) = 1 \Leftrightarrow c = \mathsf{H}(m, g^s Y^{-c}, Y)$

Μείωση μεγέθους:

Κανονική υπογραφή $\sigma \in \mathbb{G} \times \mathbb{Z}_q$

Εναλλακτική υπογραφή $\sigma \in \mathbb{Z}_q^2$

Ασφάλεια Υπογραφών Schnorr

Θεώρημα

Έστω αντίπαλος $\mathcal{A}$ ο οποίος επιτυγχάνει σε επίθεση EUF-CMA εναντίον των υπογραφών Schnorr με το πολύ $Q_{\mathcal{SO}}$ signing queries και το πολύ $Q_{\mathcal{RO}}$ random oracle queries.

Τότε υπάρχει αντίπαλος $\mathcal{B}$ ο οποίος νικάει στο $\mathsf{ID}_{\mathsf{r-EVE}}$ με πλεονέκτημα:

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{id}_{\mathsf{r-eve}}}_{\mathcal{B},Q_{\mathcal{RO}}+1}(\lambda) \geq \mathsf{Adv}^{\mathsf{schnorr}}_{\mathcal{A},\mathsf{EUF\text{-}CMA}}(\lambda) - \frac{Q_{\mathcal{SO}}(Q_{\mathcal{SO}} + Q_{\mathcal{RO}} + 1)}{q}$$

Απόδειξη Ασφάλειας Υπογραφών Schnorr i

Βασική Ιδέα

Θα κατασκευάσουμε $\mathcal{B}$ ο οποίος απαντάει στα queries στο $\mathcal{RO}$ και $\mathcal{SO}$ τα οποία κάνει ο $\mathcal{A}$ για να βγάλει πλαστογράφηση. Χρησιμοποιώντας την πλαστογράφηση θα πρέπει να κάνει έναν από τους verifiers του r impersonation game να αποδεκτούν.

Πρόβλημα Η αναγωγή θα πρέπει να προσομοιώσει υπογραφές για το $\mathcal{SO}$ χωρίς το sk

Πώς; Χρησιμοποιώντας τα transcripts από το eavesdropping game $\mathcal{T} = \{(T_i, c_i, s_i)\}$ για να προγραμματίσει το $\mathcal{RO}$.

Πρέπει να μαντέψουμε ποιο $\mathcal{RO}$ query θα οδηγήσει στην πλαστογράφηση.

Απόδειξη Ασφάλειας Υπογραφών Schnorr ii

Υποθέσεις Αν ο $\mathcal{A}$ βγάλει μια πλαστογράφηση $(m^*, (T^*, s^*))$ σημαίνει ότι:

- δεν έχει ζητήσει υπογραφή για το m^* στο $\mathcal{SO}$.
- έχει κάνει το ερώτημα (m^*, T^*, Y) στο $\mathcal{RO}$.

Ένα επιπλέον ερώτημα στο $\mathcal{RO}$: $Q_{\mathcal{RO}} + 1$

Απόδειξη Ασφάλειας Υπογραφών Schnorr iii

Αρχικοποίηση $\mathcal{B}$

- Είσοδος: $Y, \mathcal{T} = \{(T_i, c_i, s_i)\}_{i=1}^{Q_s}$ τα οποία είναι έγκυρα
- Αποστολή Y στον $\mathcal{A}$
- Αρχικοποίηση $\mathcal{RO}$ ως άδειο λεξικό

Απόδειξη Ασφάλειας Υπογραφών Schnorr iv

Προσομοίωση $\mathcal{SO}(m_i)$

- Ο $\mathcal{B}$ δεν διαθέτει το ιδιωτικό κλειδί.
- Το ερώτημα αφορά το μήνυμα m_i.
- Ανάκτηση i-οστού transcript (T_i, c_i, s_i)
- Θέτουμε $\mathcal{RO}(m_i, T_i, Y) = c_i$ (για μελλοντική χρήση)
- Η υπογραφή $\sigma_i = (T_i, s_i)$ είναι έγκυρη (T_i, s_i προέρχονται από τον challenger του $\mathsf{ID}_{\mathsf{r-EVE}}$)
- Επιστροφή σ_i

Απόδειξη Ασφάλειας Υπογραφών Schnorr v

Προσομοίωση $\mathcal{RO}(m_j, T_j, Y)$

Το $\mathcal{RO}$ ερωτάται είτε από τον $\mathcal{A}$, είτε εσωτερικά από τον $\mathcal{B}$.

Συνολικά το πολύ $Q_{\mathcal{SO}} + Q_{\mathcal{RO}} + 1$ φορές.

Για το ερώτημα (m_j, T_j):

- Αν $\mathcal{RO}(m_j, T_j, Y) \neq \perp$, επιστροφή του c_j
- Αν $\mathcal{RO}(m_j, T_j, Y) = \perp$, τότε προώθηση T_j στον challenger-verifier V_j του $\mathsf{ID}_{\mathsf{r-EVE}}$
- Λήψη c_j και προώθηση στον $\mathcal{A}$
- Αποθήκευσε $((m_j, T_j), j)$ για να θυμηθείς σε ποιον V_j θα στείλεις την απάντηση s_j.

Λήψη forgery $m^*, (T^*, s^*)$

- Θα έχει ρωτηθεί το $\mathcal{RO}(m^*, T^*)$
- Δηλαδή $T^* = T_j$ για κάποιο j
- Ανάκτηση j από λίστα και αποστολή s^* στον V_j

Πρόβλημα: Ύπαρξη συγκρούσεων

Κάποιο από τα T_i τα οποία ερωτούνται στο $\mathcal{SO}$ έχει ερωτηθεί νωρίτερα στο $\mathcal{RO}$.

Γιατί; ο $\mathcal{B}$ 'χαραμίζει' ένα transcript από αυτά που δόθηκαν από το eavesdropping.

Πιθανότητα το πολύ $Q_{\mathcal{SO}} \frac{Q_{\mathcal{SO}}+Q_{\mathcal{RO}}+1}{q}$

Συνολικά - Αναγωγή στο διακριτό λογάριθμο

$$\sqrt{\mathsf{Adv}^{\mathsf{dlp}}_{\mathcal{B}}(\lambda)} \geq \mathsf{Adv}^{\mathsf{id}_{\mathsf{da}}}_{\mathcal{A}}(\lambda) - \frac{1}{q} \qquad (\mathsf{DLP} \Rightarrow \mathsf{ID}_{\mathsf{DA}})$$

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{id}_{\mathsf{eve}}}_{\mathcal{B},\mathsf{ID}}(\lambda) = \mathsf{Adv}^{\mathsf{id}_{\mathsf{da}}}_{\mathcal{A},\mathsf{ID}}(\lambda) \qquad (\mathsf{ID}_{\mathsf{EVE}} \Leftrightarrow \mathsf{ID}_{\mathsf{DA}})$$

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{id}_{\mathsf{eve}}}_{\mathcal{B},\mathsf{ID}}(\lambda) \geq \frac{1}{Q_{\mathcal{RO}}+1}\mathsf{Adv}^{\mathsf{id}_{\mathsf{r-eve}}}_{\mathcal{A},\mathsf{ID},Q_{\mathcal{RO}}+1}(\lambda) \quad (\mathsf{ID}_{\mathsf{EVE}} \Rightarrow \mathsf{ID}_{\mathsf{r-EVE}})$$

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{id}_{\mathsf{r-eve}}}_{\mathcal{B},Q_{\mathcal{RO}}+1}(\lambda) \geq \mathsf{Adv}^{\mathsf{schnorr}}_{\mathcal{A},\mathsf{EUF\text{-}CMA}}(\lambda) - \frac{Q_{\mathcal{SO}}(Q_{\mathcal{SO}}+Q_{\mathcal{RO}}+1)}{q} \quad (\mathsf{ID}_{\mathsf{r-EVE}} \Rightarrow \mathsf{DS}_{\mathsf{Schnorr}})$$

Άρα:

$$\sqrt{\mathsf{Adv}^{\mathsf{dlp}}_{\mathcal{B}}(\lambda)} \geq -\frac{1}{q} + \frac{1}{Q_{\mathcal{RO}}+1} \cdot (\mathsf{Adv}^{\mathsf{schnorr}}_{\mathcal{A},\mathsf{EUF\text{-}CMA}}(\lambda) - \frac{Q_{\mathcal{SO}}(Q_{\mathcal{SO}}+Q_{\mathcal{RO}}+1)}{q} +)$$

Τελικά:

$$\mathsf{Adv}^{\mathsf{schnorr}}_{\mathcal{A},\mathsf{EUF\text{-}CMA}}(\lambda) \leq \frac{Q_{\mathcal{RO}}+1}{q} + \frac{Q_{\mathcal{SO}}(Q_{\mathcal{SO}}+Q_{\mathcal{RO}}+1)}{q} + (Q_{\mathcal{RO}}+1)\cdot\sqrt{\mathsf{Adv}^{\mathsf{dlp}}_{\mathcal{B}}(\lambda)}$$

One-More Discrete Log (OMDL) [BNPS03] i

DL oracle το οποίο για $Y_i \in \mathbb{G}$ επιστρέφει $x_i \in \mathbb{Z}_q : Y_i = g^{x_i}$

Χρήση το πολύ $Q = \text{poly}(\lambda)$ φορές.

Εξαγωγή ενός επιπλέον Discrete Log που δεν έχει ρωτηθεί στο DL oracle

Ισχυρότερη υπόθεση από DLP (DLP $=$ OMDL$_0$)

Χρήση για απόδειξη ασφάλειας Schnorr Identification για active - concurrent sessions [BP02].

One-More Discrete Log (OMDL) [BNPS03] ii

Algorithm 2: OMDL_n

Input : λ

Output: $\{0,1\}$

$(\mathbb{G}, q, g) \leftarrow \mathsf{Pgen}(1^\lambda)$

$\{x_i\}_{i=1}^n \leftarrow \mathbb{Z}_q$

for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**

  $Y_i := g^{x_i}$

end

$(\pi, \{z_i\}_{i=1}^{Q+1}) \leftarrow \mathcal{A}^{\mathsf{DL}}(\mathbb{G}, q, g, (Y_i)_{i=1}^n)$

if $\forall i \in Q+1 : \; y_i = g^{z_{\pi(i)}} \wedge Q \leq n$ **then**

  return 1

else

  return 0

end

Ασφάλεια Schnorr i

Θεώρημα [BP02]

$$\mathrm{Adv}^{\mathsf{schnorr}}_{\mathcal{A},\mathrm{ID}_{CC}}(\lambda) \leq \frac{1}{q} + \sqrt{\mathrm{Adv}^{\mathsf{omdl}}_{\mathcal{B}}(\lambda)}$$

Αν το OMDL είναι δύσκολο, τότε το σχήμα ταυτοποίησης schnorr είναι ασφαλές εναντίον active - concurrent impersonation attacks.

Απόδειξη i

Έστω $\mathcal{A}$ που νικά στο $\mathsf{ID}_{\mathsf{CC}}$.

Θα κατασκευάσουμε $\mathcal{B}$ που νικάει στο OMDL. Δηλ. πρέπει να έχει ως έξοδο $Q+1$ διακριτούς λογάριθμους, ενώ έχει κάνει Q ερωτήσεις στο DL oracle.

Αρχικά ο $\mathcal{A}$ θα χρειαστεί να αλληλεπιδράσει με prover clones ως *verifier*. Ο $\mathcal{B}$ θα τους προσομοιώσει με τη βοήθεια του DL.

Δηλαδή:

- $\mathcal{B}$ prover
- $\mathcal{A}$ verifier

Απόδειξη ii

Ο $\mathcal{B}$ επιλέγει $Y \leftarrow\$ \mathbb{G}$. Για κάθε session με τον $\mathcal{A}$, ο $\mathcal{B}$ επιλέγει $T_i \leftarrow\$ \mathbb{G}$

Όταν ο $\mathcal{A}$ (V) στείλει το challenge c_i ο $\mathcal{B}$ κάνει query to DL oracle με την τιμή $T_i \cdot Y^{c_i}$ και προωθεί την απάντησή του ως s_i.

Ορθότητα:

$$\begin{aligned} \mathsf{DL}(T_i \cdot Y^{c_i}) = \\ \mathsf{DL}(T_i) + \mathsf{DL}(Y^{c_i}) = \\ t_i + cx_i = \\ s_i \end{aligned}$$

Αλλαγή ρόλων. Δηλαδή:

- $\mathcal{B}$ verifier
- $\mathcal{A}$ prover

Απόδειξη iii

Στη συνέχεια ο $\mathcal{A}$ κάνει την direct attack στέλνοντας commitment T.

Ο $\mathcal{B}$ επιλέγει τυχαίο challenge c και το στέλνει στον $\mathcal{A}$. Λαμβάνει το response s και ελέγχει αν $g^s = TY^c$ (επιτυχές με πιθανότητα ϵ)

Rewind

Ο $\mathcal{B}$ επιλέγει τυχαίο challenge c' και το στέλνει στον $\mathcal{A}$. Λαμβάνει το response s' και ελέγχει αν $g^{s'} = TY^{c'}$. (επιτυχές με πιθανότητα ϵ).

Ο $\mathcal{B}$ ανακτά το $x, Y = g^x$ ως: $x = \frac{s-s'}{c-c'}$

Στη συνέχεια υπολογίζει τους υπόλοιπους Q λογάριθμους για τα T_i που ζήτησε από το DL ως $t_i = s_i - c_i x$

Τελικά επιστρέφει $(x, t_1, \cdots, t_Q)$.

Algebraic Group Model i

Ιδανικά Straight Line Reductions: Δεν χρειάζεται το rewinding

Δεν υπάρχουν στο standard model

Algebraic Group Model [FKL18]

Ο $\mathcal{A}$ κάθε φορά που επιστρέφει ένα στοιχείο $T \in \mathbb{G}$ επιστρέφει και την αναπαράσταση του σχετικά με τα στοιχεία που έχει δει μέχρι τώρα.

Δηλαδή:
$(T, (a_o, a_1, \cdots, a_n)) \leftarrow \mathcal{A}(g, Y_1, \cdots, Y_n)$
με
$= g^{a_0} Y_1^{a_1} \cdots Y_n^{a_n}$

Algebraic Group Model ii

Υπολογισμός DLP χωρίς rewinding

Όταν εξαχθεί το forgery $\sigma^* = (T^*, s^*)$ εξάγονται και (a_0, a_1) ώστε $= g^{a_0} Y^{a_1}$

Όμως: $g^{s^*} = TY^{c^*}$ έχουμε:

$$g^{s^*} Y^{c^*} = g^{a_0} Y^{a_1} \Rightarrow$$

$$s^* + xc^* = a_0 + xa_1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{a_0 - s^*}{c^* - a_1}$$

Βιβλιογραφία i

- Mihir Bellare, Chanathip Namprempre, David Pointcheval, and Michael Semanko, *The one-more-rsa-inversion problems and the security of chaum's blind signature scheme*, J. Cryptol. **16** (2003), no. 3, 185–215.
- Mihir Bellare and Adriana Palacio, *Gq and schnorr identification schemes: Proofs of security against impersonation under active and concurrent attacks*, Advances in Cryptology — CRYPTO 2002 (Berlin, Heidelberg) (Moti Yung, ed.), Springer Berlin Heidelberg, 2002, pp. 162–177.
- Georg Fuchsbauer, Eike Kiltz, and Julian Loss, *The algebraic group model and its applications*, Advances in Cryptology – CRYPTO 2018 (Cham) (Hovav Shacham and Alexandra Boldyreva, eds.), Springer International Publishing, 2018, pp. 33–62.

Βιβλιογραφία ii


David Pointcheval and Jacques Stern, *Security arguments for digital signatures and blind signatures*, J. Cryptol. **13** (2000), no. 3, 361–396.


Claus-Peter Schnorr, *Efficient identification and signatures for smart cards*, Advances in Cryptology - CRYPTO '89, 9th Annual International Cryptology Conference, Santa Barbara, California, USA, August 20-24, 1989, Proceedings (Gilles Brassard, ed.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 435, Springer, 1989, pp. 239–252.