Κλασική Λογική και Control operators

Έως 1990 – δεν υπήρχε Curry-Howard για την κλασική λογική

Αλλά τότε το breakthrough: Griffin. Το επίπεδο της κλασικής λογικής αντιστοιχεί σε λειτουργία των control operators γνωστούς στη θεωρία των γλωσσών προγραμματισμού.

Κλασική Λογική

Προσθέτουμε αρχές όπως:

$\varphi \vee \neg\varphi$ νόμος αποκλεισμού του τρίτου

$\neg\neg\varphi \to \varphi$ απαλοιφή διπλής άρνησης

$((\varphi\to\psi)\to\varphi)\to\varphi$ Νόμος του Peirce

$(\neg\varphi\to\varphi)\to\varphi$ απαγωγή σε άτοπο.

Σύστημα «αστήρικτης» φυσικής απαγωγής

$\Gamma,\varphi \vdash \varphi$

$$\frac{\Gamma,\varphi\vdash\psi}{\Gamma\vdash\varphi\to\psi} \qquad \frac{\Gamma\vdash\varphi\to\psi \quad \Gamma\vdash\varphi}{\Gamma\vdash\psi}$$

$$\frac{\Gamma,\varphi\to\bot\vdash\bot}{\Gamma\vdash\varphi}(\neg E) \qquad (\neg\varphi\equiv\varphi\to\bot)$$

Ισχύει και ο νόμος $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$ διότι

αν $\Gamma \vdash \bot$ τότε $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ και από $\neg E$ $\Gamma \vdash \varphi$.

Η δενδρική μορφή της φυσικής απαγωγής λαμβάνει προσθέτοντας τον κανόνα

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg\varphi]^1 \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\,1$$

Ισοδυναμία αξιωμάτων / 20-21 (σημειώσεις λ-calculus).

①⇒② όπως δείχνεται με το ①⇒② στη σελ 20

$$\dfrac{\vdash A \vee \neg A \qquad \cancel{[A]}^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\neg A}^2 \quad \neg\neg A \quad \cancel{[\neg A]}^1}{\bot}}{A}\,2}{A}\,1$$

← ενσωματώνεται και ... καθώς το Α με το Α και όμοια $\neg A$ με το δεύτ. Α αντίστοιχα

Σημείωση: Αν αποδείξουμε ότι $\Gamma \vdash \varphi$ σε δενδρική μορφή τότε $\Gamma \vdash \varphi$ και σε γραμμική μορφή [Θα χρησιμοποιούμε τη δενδρική μορφή ως πιο εποπτική].

Τι θα γίνει στο Hilbert αν θέλαμε να εισάγουμε ένα νέο αξίωμα το $(A3_\bot)$ $((\varphi \to \bot) \to \bot) \to \varphi$ (δηλαδή $\neg\neg\varphi \to \varphi$) | $\Gamma \vdash_H \varphi$

Ισχύει:

- Θεώρημα απαγωγής
- Ισοδυναμία συστήματος Hilbert με φυσική απαγωγή

$$\Gamma \vdash_N \varphi \iff \Gamma \vdash_H \varphi$$

Classical logic. $(\neg B \equiv B \to \bot)$.

1. $A \vee \neg A$
2. $\neg\neg A \to A$
3. $((A \to B) \to A) \to A$

---

1 ⇒ 2

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A \vee \neg A \qquad \dfrac{\cancel{A}^{1}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\neg A}^{1} \quad \cancel{\neg\neg A}^{2}}{\bot}}{A}{\scriptstyle 2}}{A}{\scriptstyle 1}}{\neg\neg A \to A}{\scriptstyle 2}$$

---

2 ⇒ 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg(A \vee \neg A)}^{3} \quad \dfrac{\cancel{A}^{1}}{A \vee \neg A}}{\bot}}{\neg A}{\scriptstyle 1} \qquad \dfrac{\cancel{\neg(A \vee \neg A)}^{3} \quad \dfrac{\cancel{\neg A}^{2}}{A \vee \neg A}}{\dfrac{\bot}{\neg\neg A}{\scriptstyle 2}}}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(A \vee \neg A)}{\scriptstyle 3}} \qquad \neg\neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)}{A \vee \neg A}$$

③ ⇒ ②

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\neg A}^{2} \quad \cancel{\neg A}^{1}}{\bot}}{A}}{\neg A \to A}\,1 \qquad \underbrace{((A\to\bot)\to A)\to A}_{((\neg A \to A)\to A)}}{\dfrac{A}{\neg\neg A \to A}\,2}$$

Pierce με $B=\bot$

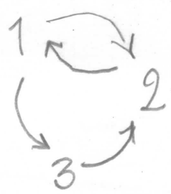
---

①

① ⇒ ③

σαν υπόθεση $(A\to B)\to A$

$$\dfrac{A \vee \neg A \qquad \dfrac{\cancel{A}^{3}}{((A\to B)\to A)\to A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg A}^{3} \quad \cancel{A}^{1}}{\bot}}{B}}{A\to B}\,1 \qquad \cancel{(A\to B)\to A}^{2}}{A}}{((A\to B)\to A)\to A}\,2}{((A\to B)\to A)\to A}\,3$$



Ισχύει το Θεώρημα πληρότητας για την κλασική λογική

φ ταυτολογία (κλασική) $\Longrightarrow$ $\vdash \varphi$

Απόδειξη ανάλογη Kalmár

Αλλά και πιο σύντομα: Αν φ κλασική ταυτολογία τότε $\neg\neg\varphi$ αποδείξιμη στη διαισθητική λογική άρα και στην κλασική $\vdash \neg\neg\varphi$. Από $\neg\neg\varphi \to \varphi$ με MP, παίρνουμε $\vdash \varphi$.

Ισχύει βέβαια $\nvdash \bot$. Αλλά και το ισχυρό:

Πρόταση: Έστω φ φόρμουλα που δεν είναι ταυτολογία. Έστω Z το σύστημα που προκύπτει από το κλασικό σύστημα προσθέτοντας σαν αξίωμα την φ. Τότε Z είναι ασυνεπές

Έστω H το σύστημα Hilbert και $Z = H + \varphi$.

Υπάρχει μια αποτίμηση V για την οποία $\bar{V}(\varphi) = F$.

Τότε για κάθε προτασιακή μεταβλητή p_i που εμφανίζεται στη φ θέτουμε στη θέση της

φ_i:
- μια αντίφαση αν $\bar{V}(\varphi_i) = F$
- μια ταυτολογία αν $\bar{V}(\varphi_i) = T$.

, οπότε προκύπτει η φ'.

Τότε κάθε αποτίμηση V θα δίνει την τιμή ~~φ $\bar{V}(\varphi) = F$~~

τη $\bar{V}(\varphi') = F$ οπότε η $\neg\varphi'$ είναι ταυτολογία άρα αποδείξιμη από το H. $H \vdash \neg\varphi'$ και άρα $Z \vdash \varphi' \to \bot$ δηλ.

Θέλουμε και η $Z \vdash \varphi'$ (αφού το φ είναι σχήμα αξιωμάτων) άρα $Z \vdash \bot$ (Z ασυνεπές)