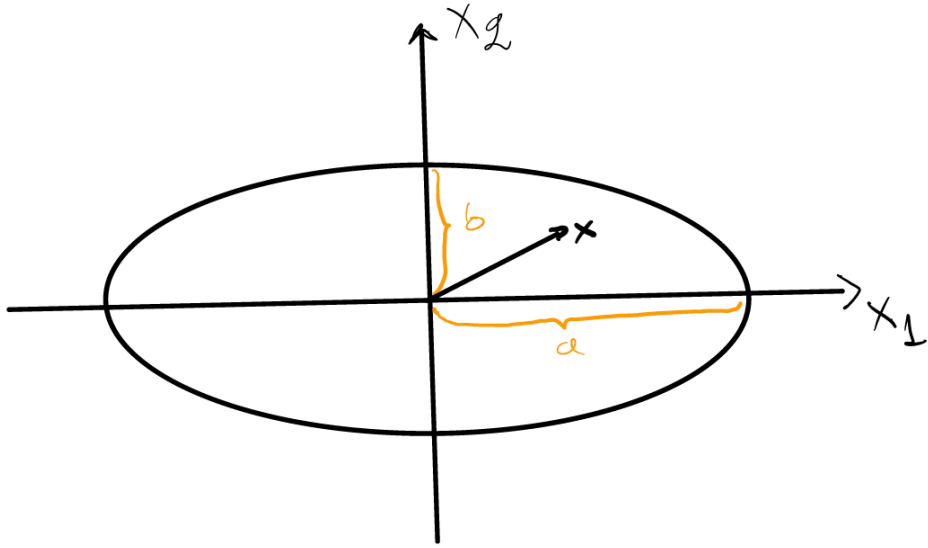
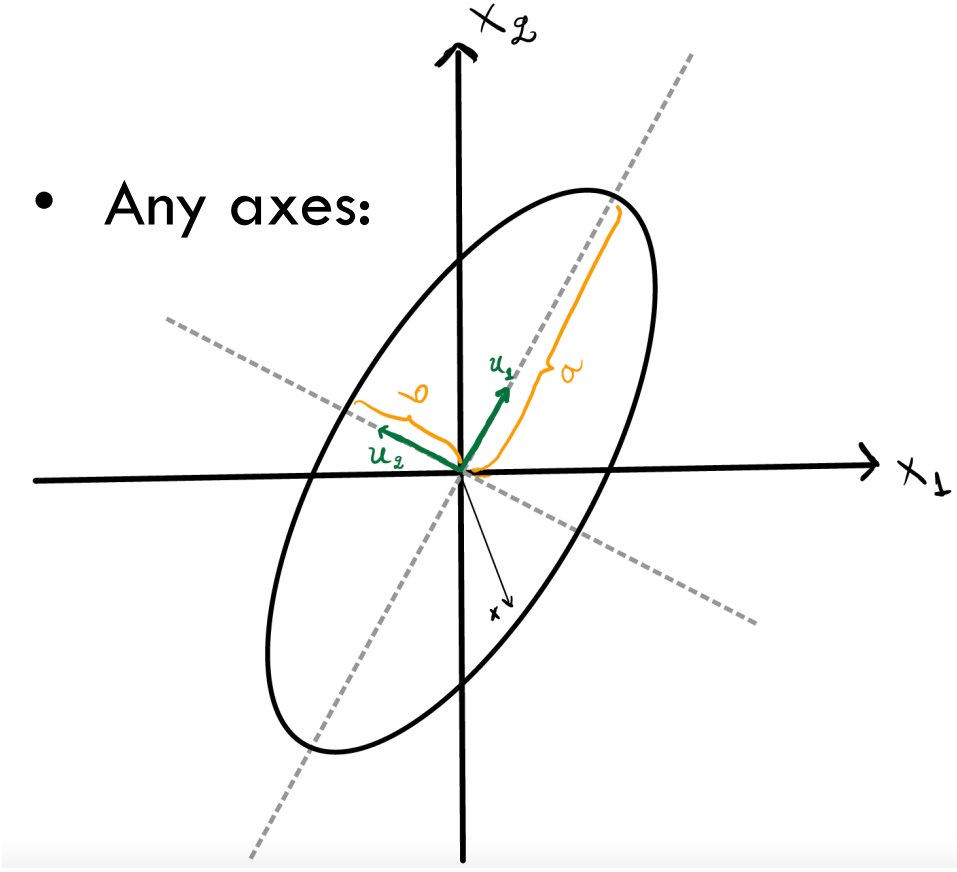
Ελλειψοειδή

- 2 διαστάσεις
  - Axis aligned:

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1$$



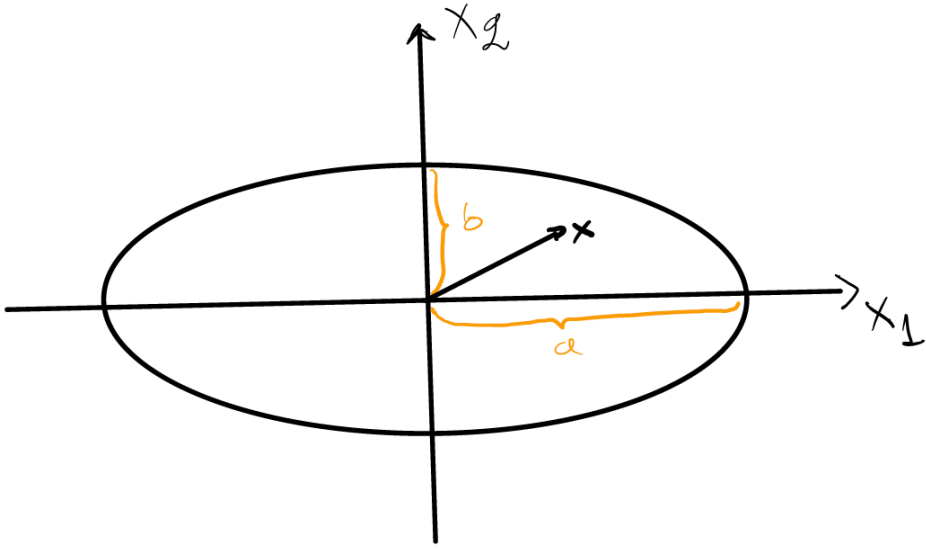
  - Any axes:



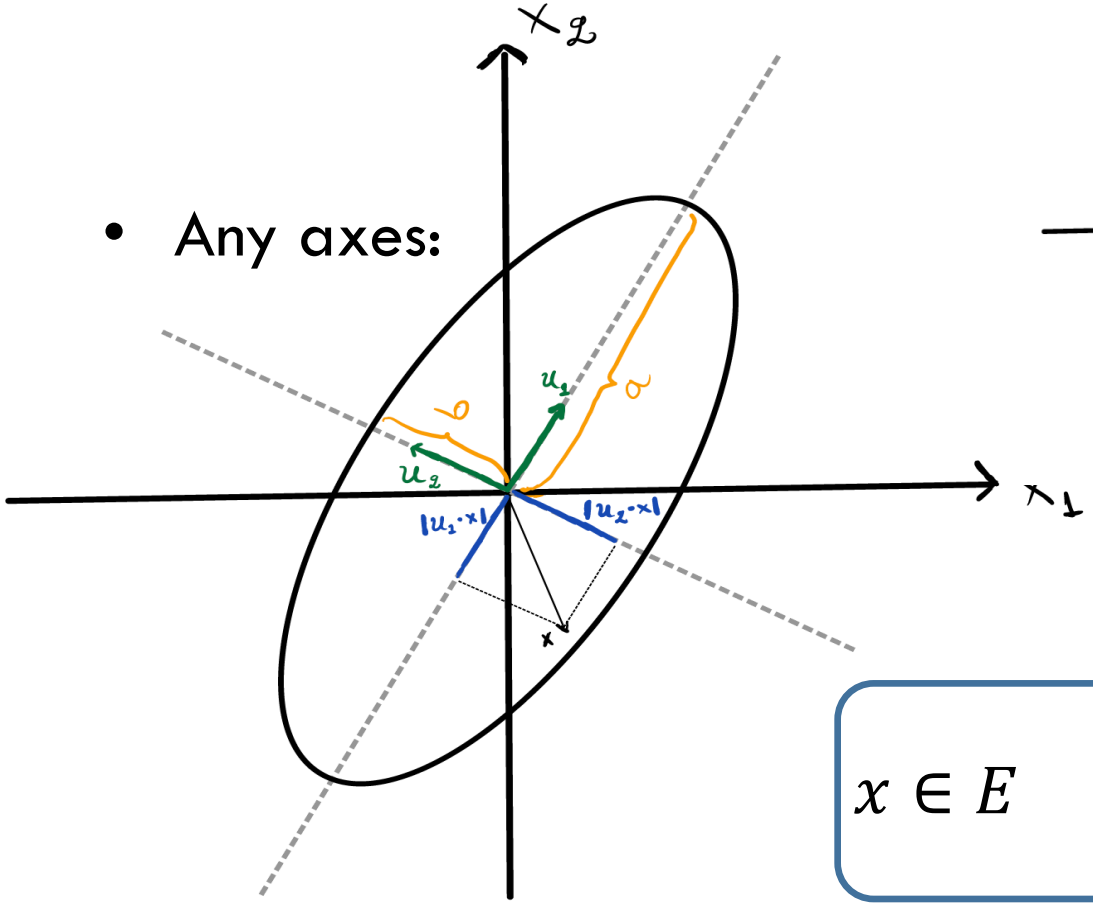
Ελλειψοειδή

- 2 διαστάσεις
  - Axis aligned:

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1$$



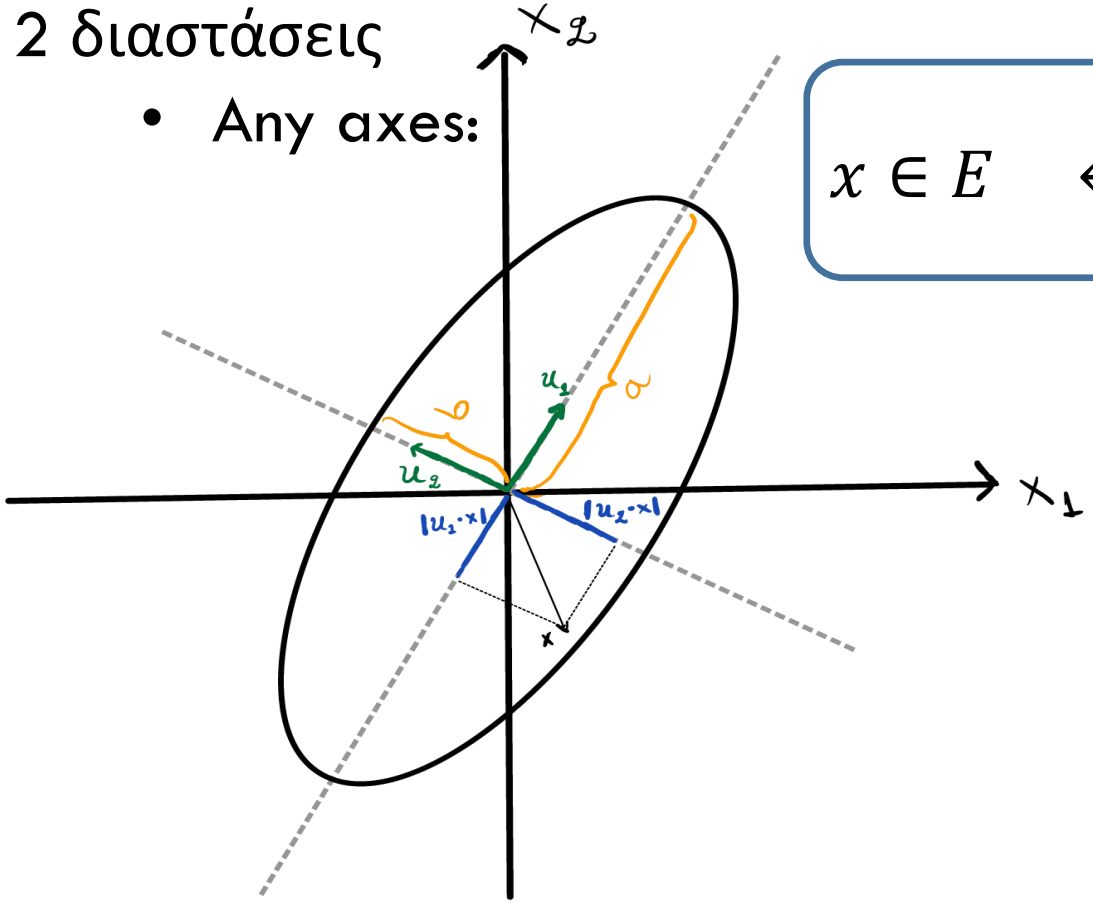
  - Any axes:



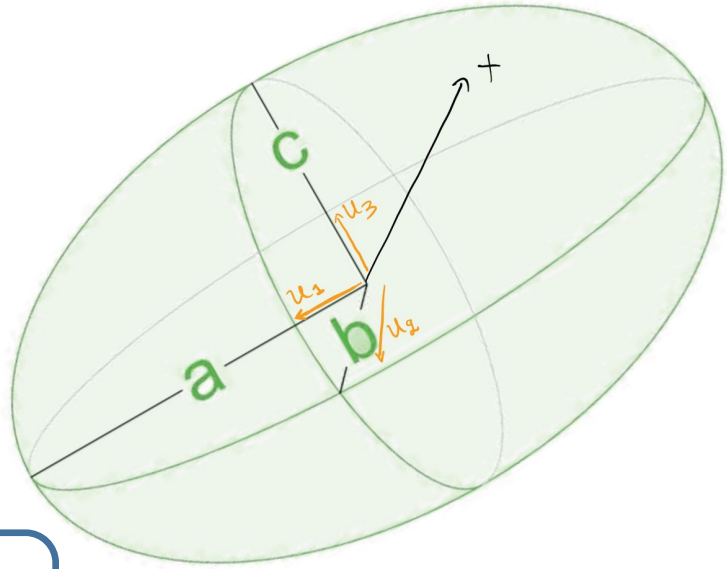
$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot x)^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot x)^2}{b^2} \leq 1$$

Ελλειψοειδή

- 2 διαστάσεις
  - Any axes:



$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot x)^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot x)^2}{b^2} \leq 1$$



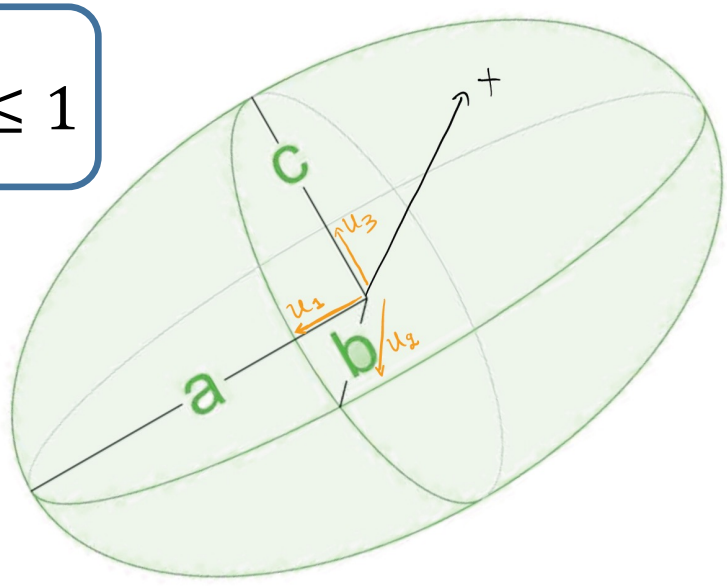
- 3 διαστάσεις

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot x)^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot x)^2}{b^2} + \frac{(u_3 \cdot x)^2}{c^2} \leq 1$$

Ελλειψοειδή στον $\mathbb{R}^n$

- 3 διαστάσεις

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot x)^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot x)^2}{b^2} + \frac{(u_3 \cdot x)^2}{c^2} \leq 1$$



- n διαστάσεις

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i \cdot x}{a_i}\right)^2 \leq 1$$

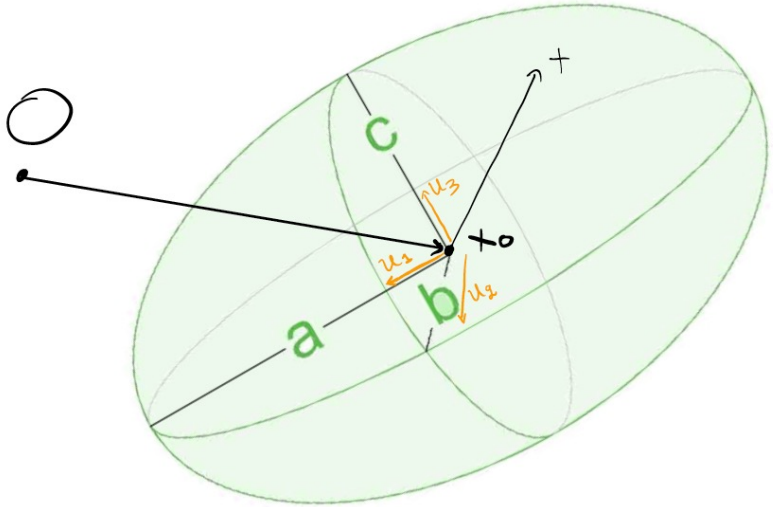
$u_1, u_2, \ldots, u_n$ orthonormal

$a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$

Ελλειψοειδή στον $\mathbb{R}^n$

- 3 διαστάσεις

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \frac{(u_1 \cdot (x - x_0))^2}{a^2} + \frac{(u_2 \cdot (x - x_0))^2}{b^2} + \frac{(u_3 \cdot (x - x_0))^2}{c^2} \leq 1$$



- n διαστάσεις

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i \cdot (x - x_0)}{a_i} \right)^2 \leq 1$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ ορθοκανονικά

$a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

Ελλειψοειδή στον $\mathbb{R}^n$

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i \cdot (x - x_0)}{a_i} \right)^2 \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i \cdot (x - x_0)}{a_i} \right)^2 = \|\Lambda U^T (x - x_0)\|^2 \qquad (\|z\|^2 = z^T z)$$

$$= (\Lambda U^T (x - x_0))^T \left(\Lambda U^T (x - x_0) \right)$$

$$= (x - x_0)^{\mathrm{T}} \mathrm{U} \Lambda^{\mathrm{T}} \Lambda U^T (x - x_0)$$

$$= (x - x_0)^{\mathrm{T}} \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda^2} \boldsymbol{U^T} (x - x_0)$$

$$= (x - x_0)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \, (x - x_0) \qquad \boldsymbol{A}\text{: θετικά ορισμένος}$$

$$x \in E \quad \leftrightarrow \quad (x - x_0)^{\mathrm{T}} A \, (x - x_0) \leq 1$$

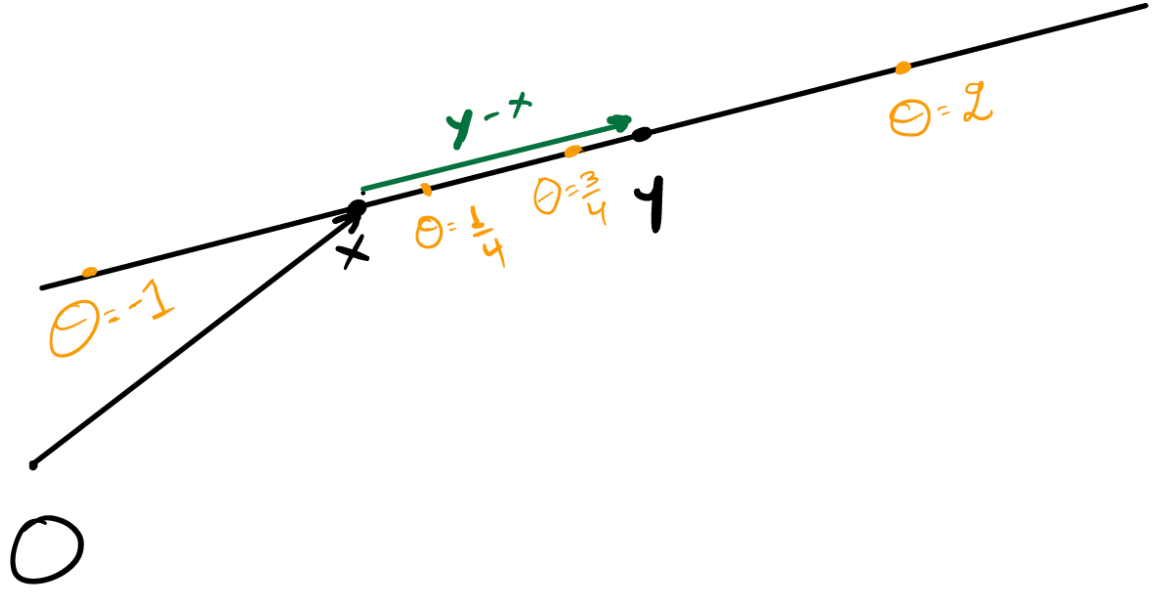
Κυρτά σύνολα

- Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$. Η ευθεία που τα ενώνει ορίζεται να είναι το σύνολο

$$\{ x + \theta(y - x) \mid \theta \in \mathbb{R} \}$$

- Γιατί;
- Γενικεύει την ευθεία στο επίπεδο ($n = 2$) και στο χώρο ($n = 3$)

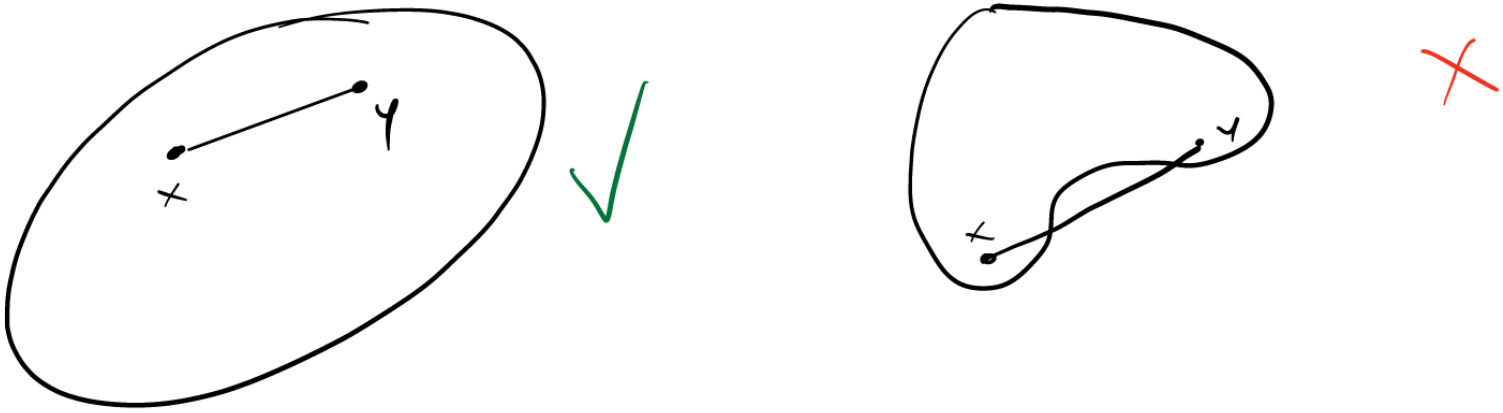
- $n = 3$:



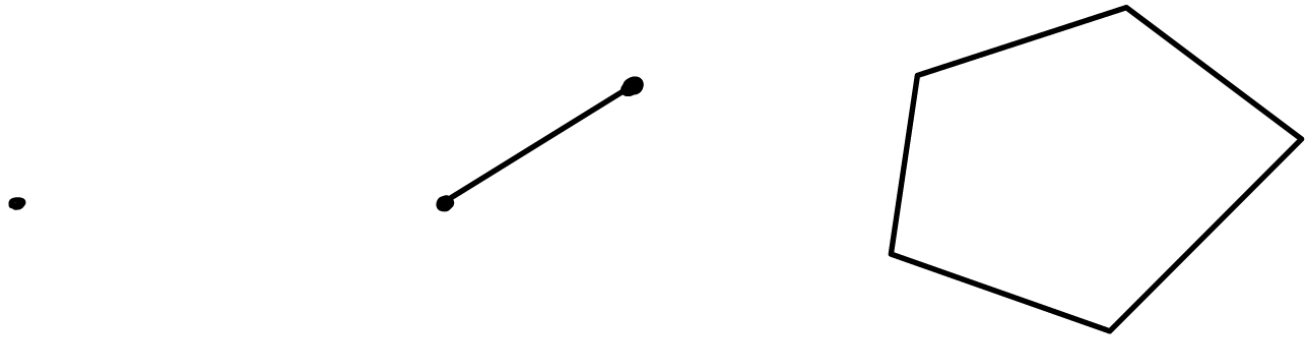
- Ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ x, y: $[x, y] := \{x + \theta(y - x) \mid \theta \in [0,1]\}$
$= \{(1 - \theta)x + \theta y \mid \theta \in [0,1]\}$

Κυρτά σύνολα

- **Ορισμός:** $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν $\forall x, y \in K,\ [x, y] \subseteq K$.

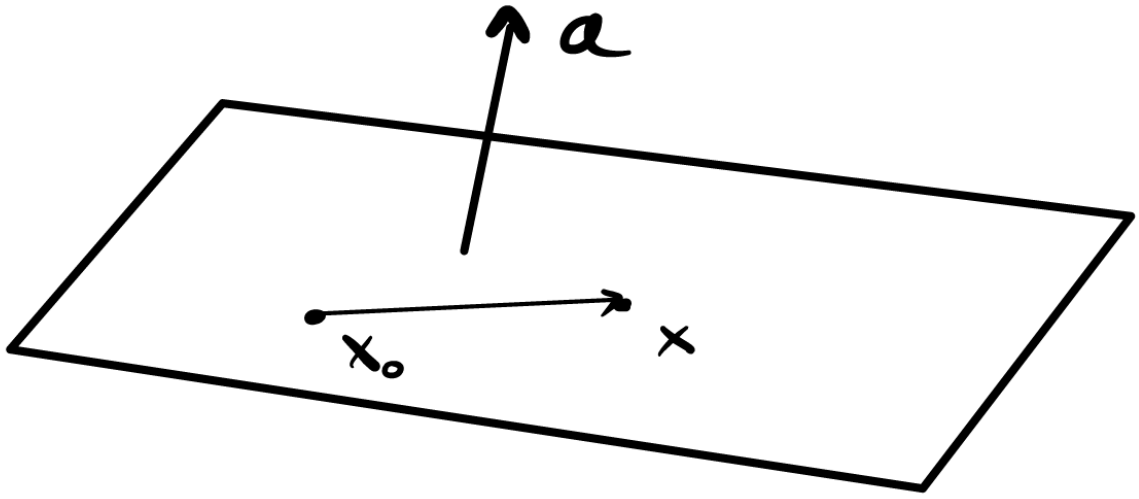


- Άλλα δισδιάστατα παραδείγματα:



Κυρτά σύνολα: Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^n$

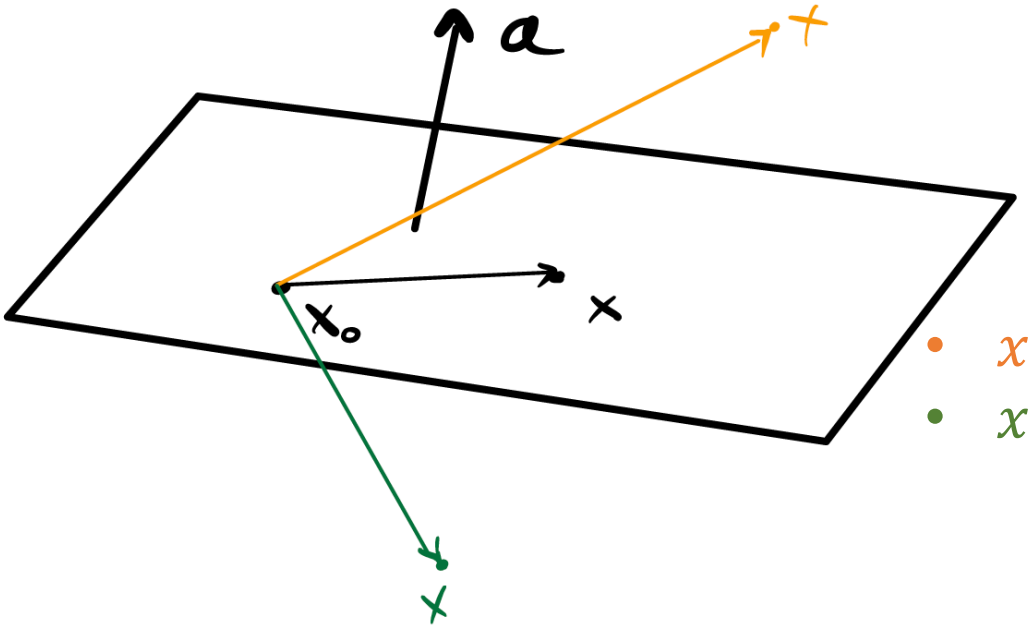
- Υπερεπίπεδα: $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = b \}, \quad a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$
  - Γιατί;
  - Γενικεύει το επίπεδο:



  - Απόδειξη κυρτότητας;

Κυρτά σύνολα: Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^n$

- Ημιχώροι: $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b \}, \quad a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$
  - Γενικεύει τους 3d ημιχώρους



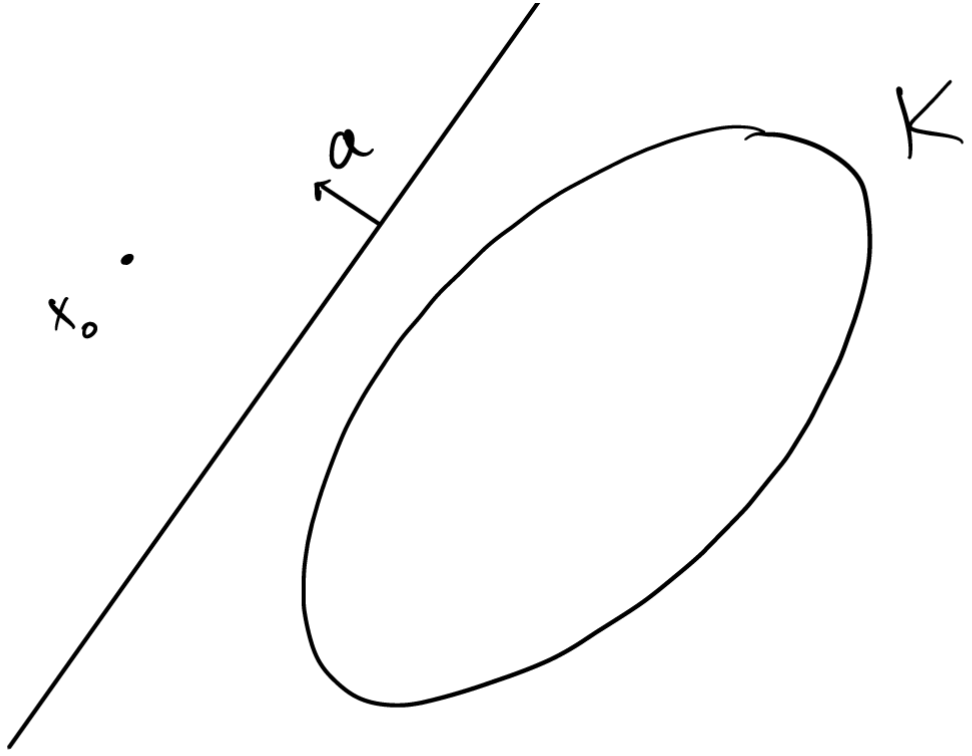
- x πάνω απ' το επίπεδο: $a \cdot (x - x_0) > 0$
- x κάτω απ' το επίπεδο: $a \cdot (x - x_0) < 0$

  - Γενικεύει τα ημιεπίπεδα.
  - Απόδειξη κυρτότητας; Άσκηση!

Κυρτά σύνολα: Παραδείγματα στον $\mathbb{R}^n$

- Μπάλες: $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r \}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \ r > 0$
- Ελλειψοειδή
- Αποδείξεις και περισσότερα κυρτά σύνολα, την άλλη φορά!

Θεώρημα Διαχωριστικού Υπερεπιπέδου



Θεώρημα:

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό και κλειστό. Έστω σημείο $x_0 \notin K$.

Τότε, $\exists a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a \cdot x_0 > b$

$a \cdot x < b, \quad \forall x \in K$

Υπενθύμιση από Ανάλυση

Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής:

Έστω $\mathrm{K} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ κλειστό και φραγμένο (συμπαγές).

Έστω $f: K \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Τότε η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στο K.